

Die Analyse statistisch zeitvarianter Systeme

**Der Technischen Fakultät der
Universität Erlangen-Nürnberg**

**zur Erlangung des Grades
DOKTOR - INGENIEUR**

**vorgelegt von
Otto Mildenberger**

Erlangen 1968

1968 № 2 14

Die Analyse statistisch zeitvarianter Systeme

**Der Technischen Fakultät der
Universität Erlangen-Nürnberg**

**zur Erlangung des Grades
DOKTOR - INGENIEUR**

**vorgelegt von
Otto Mildenerger**

Erlangen 1968



Als Dissertation genehmigt von der
Technischen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung: 8.2.1968

Tag der Promotion: 18.7.1968

Dekan: Prof. Dr.rer.nat. Hofmann

Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. R. Unbehauen
Prof. Dr.phil.nat. H. Schlitt

Inhalt

EINLEITUNG

4

I. DIE LINEAREN STETIGEN SYSTEME

1. Vorbemerkungen	5
2. Grundlegende Eigenschaften von linearen Systemen	5
2.1 Lineare Funktionale	5
2.2 Die Definition des linearen stetigen Systems	8
2.3 Distributionen	10
2.4 Die Erweiterung auf nichtstetige Eingangssignale bei linearen Systemen	19
2.5 Kausale Systeme, die Übertragungsfunktion	21
3. Systeme, die durch lineare Differentialgleichungen beschrieben werden	23
3.1 Vorbemerkungen, die Existenz von Lösungen	23
3.2 Die Greensche Funktion	24
3.3 Die einseitige Greensche Funktion, das adjungierte Problem	28
3.4 Die Impulsantwort	30
4. Eine Methode zur Berechnung der Impulsantwort	34
4.1 Vorbemerkungen und Voraussetzungen	34
4.2 Die Beschreibung des Verfahrens	35
4.3 Die Lösung homogener Differentialgleichungen mit beliebigen Anfangsbedingungen	37
4.4 Eine Erweiterung des Verfahrens zur Berechnung der Impulsantwort	41
4.5 Die Berechnung der Reihenglieder von $h_0(t, \tau)$ mit Hilfe eines Digitalrechners	45
4.6 Der Sonderfall periodisch zeitvarianter Systeme	48

II. STATISTISCH ZEITVARIANTE SYSTEME

1. Vorbemerkungen	51
2. Stochastische Prozesse	51
2.1 Wahrscheinlichkeit und Zufallsvariable	51
2.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung und charakteristische Funktion	53
2.3 Stochastische Funktionen	62

3. Die Lösungen von Differentialgleichungen mit stochastischen Koeffizienten	73
3.1 Die Differentialgleichung 1. Ordnung	73
3.2 Die Reihendarstellung der Lösung bei Differen- tialgleichungen höherer Ordnung	74
4. Stabilitätsdefinitionen, das Mittelwertsystem	76
4.1 Das Mittelwertsystem	76
4.2 Die Stabilität	78
4.3 Das Streuungssystem	80
5. Stochastische Systeme, die durch Differential- gleichungen 1. Ordnung beschrieben werden	82
5.1 Allgemeine Bemerkungen	82
5.2 Die Stabilität bei normalverteiltem $b(t)$	84
5.3 Mittelwertsysteme, Beispiele	86
5.4 Ein hinreichendes Stabilitätskriterium bei nicht normalverteiltem $b(t)$	95
6. Eingefrorene Systeme	96
6.1 Einführende Bemerkungen	96
6.2 Die Definition des eingefrorenen Systems	97
6.3 Stabilitätskriterien für eingefrorene Systeme	100
6.4 Beispiele für eingefrorene Systeme	101
SCHRIFTTUMSVERZEICHNIS	105
Lebenslauf	107

EINLEITUNG

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit Problemen bei der Analyse linearer Systeme mit einem Ein- und Ausgang.

Im Teil I werden zunächst allgemeine Eigenschaften linearer Systeme abgeleitet. Es wird gezeigt, daß lineare Differentialgleichungen unter gewissen Bedingungen lineare Systeme beschreiben und für diesen Fall ein Verfahren zur Berechnung der Impulsantwort abgeleitet. Das Berechnungsverfahren ist stets anwendbar, wenn die Differentialgleichungskoeffizienten in Taylorreihen entwickelbar sind. Schließlich wird eine Programmierungsmethode beschrieben, die eine Aufstellung von Gleichungen zur Berechnung der Impulsantwort ermöglicht. Die Methode wird an einem periodisch zeitvarianten System mit einer Differentialgleichung 2. Ordnung erprobt.

Der Teil II der Arbeit beschäftigt sich mit Systemen, deren Differentialgleichungen statistisch zeitvariante Koeffizienten besitzen.

Es wird gezeigt, daß unter geeigneten Voraussetzungen an die Korrelationsfunktionen der Koeffizienten das im Teil I angegebene Verfahren zur Bestimmung der Impulsantwort anwendbar ist. Ausgehend von diesem Lösungsansatz wird die Impulsantwort eines in der Arbeit eingeführten Mittelwertsystems berechnet. Das Mittelwertsystem ist ein nichtstatistisches und oft zeitinvariantes System; es ersetzt das statistische System bezüglich der Erwartungswerte seiner Ein- und Ausgangssignale. Stabilitätsdefinitionen und hinreichende Stabilitätskriterien für statistisch zeitvariante Systeme werden angegeben.

Schließlich wird der Begriff des eingefrorenen Systems eingeführt. Lassen sich die Korrelationsfunktionen der zufälligen Differentialgleichungskoeffizienten im interessierenden Zeitbereich genügend genau durch Konstanten approximieren, so beschreibt die sich so ergebende Differentialgleichung ein eingefrorenes System.

Eingefrorene Systeme sind rechnerisch besonders einfach zu behandeln. Hinreichende und notwendige Stabilitätskriterien werden abgeleitet.

I DIE LINEAREN STETIGEN SYSTEME

I.1 Vorbemerkungen

Es werde ein abstraktes oder physikalisches Gebilde betrachtet, das auf gewissen Wegen, den sogenannten Eingängen, beeinflusst werden kann und das auf ebenfalls bestimmten Wegen, den Ausgängen, als Folge dieser Beeinflussung reagiert. Für die folgenden Untersuchungen sind nur die Fälle von Interesse, bei denen der Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangssignalen mathematisch beschreibbar ist. Die mathematische Beschreibung ist meist nur unter mehr oder weniger starken Einschränkungen möglich. So kann etwa eine Beschränkung dadurch vorliegen, daß nur Eingangssignale aus der Klasse der stetigen Funktionen mit einem maximal zulässigen Funktionswert erlaubt sind. Ebenfalls wird man Abweichungen zwischen den beobachteten Ein- und Ausgangsbeziehungen und denen aus der mathematischen Darstellung zulassen müssen. Fragen dieser Art sollen in der vorliegenden Arbeit unberücksichtigt bleiben. Unter einem System soll im folgendem stets nur der mathematische Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsgrößen verstanden werden. Aus der großen Klasse der Systeme werden in dieser Arbeit nur die linearen stetigen Systeme mit einem Eingang und einem Ausgang behandelt. Diese sind u.a. dadurch charakterisiert, daß sie stetigen Eingangsfunktionen stetige Ausgangsfunktionen eindeutig zuordnen. Eine genauere Definition wird später angegeben.

I.2 Grundlegende Eigenschaften von linearen Systemen

I.2.1 Lineare Funktionale

I.2.1.1 Der Raum der stetigen Funktionen. Es wird die Menge $C = \{f(x)\}$ aller in $[-\infty, +\infty]$ bzw. in $\bar{R} = \{-\infty \leq x \leq \infty\}$ stetigen Funktionen $f(x)$ betrachtet. Voneinander verschiedene stetige Funktionen sind dann verschiedene Elemente des Raumes C der stetigen Funktionen. Der Raum C ist damit abgeschlossen gegen die gewöhnlichen Gesetze der Algebra, es gilt beispielsweise:

$$f_1(x) + f_2(x) = f_2(x) + f_1(x),$$

$$c \{f_1(x) + f_2(x)\} = c f_1(x) + c f_2(x),$$

$$(c_1 + c_2)f(x) = c_1 f(x) + c_2 f(x); \quad c, c_1, c_2 \text{ reell.}$$

Ebenso ist eine beliebige endliche Linearkombination

$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)$ wieder ein Element von C , wenn $f_v(x)$, $v=1 \dots n$ Elemente aus C und $c_1, c_2, \dots$ reell sind.

Als Norm $\|f(x)\|$ wird im folgenden der größte Wert $|f(x)|$, $x \in \bar{R}$, bezeichnet. $\|f(x)\|$ existiert, da eine in einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion stets auch beschränkt ist.

I.2.1.2 Das lineare Funktional. Ein Funktional $F[f(x)]$ auf dem Raum C der stetigen Funktionen ist eine Vorschrift, die jedem Element $f(x) \in C$ eine reelle Zahl zuordnet. Distributiv heißt das Funktional, wenn für jede endliche Linearkombination aus Elementen von C gilt:

$$F[c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x)] = c_1 F[f_1(x)] + \dots + c_n F[f_n(x)] .$$

Beschränkt heißt das Funktional, wenn eine positive Zahl N existiert, so daß für alle $f(x) \in C$ die Beziehung

$$|F[f(x)]| \leq N \|f(x)\|$$

gilt. Ist ein Funktional auf C distributiv und beschränkt, so nennt man es ein lineares Funktional. Man sieht leicht ein, daß ein lineares Funktional stetig ist, es gilt nämlich folgende Eigenschaft: Konvergiert die Folge $f_1(x), f_2(x), \dots$ in $\bar{R}$ gleichmäßig gegen $f(x)$; $f_1(x), f_2(x), \dots, f(x) \in C$, so konvergiert auch die Folge $F[f_1(x)], F[f_2(x)], \dots$ gegen $F[f(x)]$.

Beweis: $|F[f(x)] - F[f_n(x)]| = |F[f(x) - f_n(x)]| \leq N \|f(x) - f_n(x)\|$.

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenfolge, gilt

$$\|f_n(x) - f(x)\| \rightarrow 0 \text{ und somit auch } F[f(x)] - F[f_n(x)] \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty .$$

Man erkennt, daß die Begriffe Stetigkeit und Beschränktheit hier identisch sind. Als weitere wichtige Eigenschaft leitet man die Beziehung

$$F[0] = 0$$

ab. Dazu setzt man $f(x) = c f_1(x)$ und erhält mit $c=0$:

$$F[f(x)] = 0 \cdot F[f_1(x)] = 0 .$$

Nach einem Satz von Riesz (vgl. z.B. [16]) läßt sich nun jedes lineare Funktional darstellen durch das Stieltjes-Integral:

$$F[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dg(x) .$$

$g(x)$ ist eine Funktion von beschränkter Variation.

I.2.1.3 Das Stieltjes-Integral. Da im folgenden der Begriff des Stieltjesschen Integrales häufig benutzt wird, werden die wichtigsten Eigenschaften solcher Integrale ohne Beweis angegeben (vgl. z.B. [16]).

$z(x)$ sei eine in $a \leq x \leq b$ definierte Funktion. Wird die Zerlegung $a = x_0 < \dots < x_n = b$ vorgenommen und die Summe

$$S_\delta = \sum_{i=1}^n |z(x_i) - z(x_{i-1})|$$

gebildet, so heißt $z(x)$ von beschränkter Variation, wenn S_δ für alle möglichen Unterteilungen von $[a, b]$ und beliebige Werte n beschränkt bleibt. Die obere Grenze dieser Summe wird mit $V_a^b(z)$ bezeichnet und heißt Totalvariation. Ist beispielsweise $z(x)$ in $[a, b]$ monoton ansteigend, so wird, wie man leicht einsieht, $V_a^b(z) = z(b) - z(a)$. Sinngemäß ist die Definition auch für das Intervall $[-\infty, \infty]$ gültig.

Ist $z(x)$ eine Funktion von beschränkter Variation, so läßt sich zeigen [16], daß die Darstellung $z(x) = z_1(x) - z_2(x)$ erlaubt ist, wobei $z_1(x)$ und $z_2(x)$ beide in $[a, b]$ monoton ansteigende Funktionen sind. Eine Form dieser Funktionen lautet:

$$z_1(x) = \frac{1}{2} [V_a^x(z) + z(x)] ; z_2(x) = \frac{1}{2} [V_a^x(z) - z(x)] . \quad (I, 1)$$

Ausgehend von einer monoton ansteigenden Funktion $g(x)$, heißt

$$I = \int_a^b f(x) dg(x)$$

Stieltjes-Integral und ist definiert als n - Grenzwert der Summe

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) [g(x_i) - g(x_{i-1})] .$$

Dabei wurde die Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ vorgenommen; $f(x)$ ist stetig in $[a, b]$, $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Es läßt sich zeigen, daß die Summe tatsächlich einen Grenzwert besitzt, der mit I bezeichnet wird.

Ist das Integrationsintervall unendlich, so gilt:

$$I = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dg(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dg(x) .$$

Zwei Sonderfälle des Stieltjes-Integrals sind besonders interessant.

a) $g(x)$ ist differenzierbar in $[a, b]$, dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) \cdot h(x) dx \text{ mit } h(x) = g'(x),$$

man erhält also ein Riemann-Integral.

b) $g(x)$ ist eine Treppenfunktion, die an den Stellen $x_1, \dots, x_n$ positive Sprünge der Höhen $k_1, \dots, k_n$ aufweist. Dann wird:

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) k_i .$$

Die bisher gemachten Voraussetzungen, $g(x)$ monoton ansteigend und $f(x)$ stetig in $[a, b]$, lassen sich nach zwei Richtungen ändern.

1. Ist $g(x)$ nicht monoton ansteigend, aber existiert $V_a^b(g)$, d.h. $g(x)$ ist von beschränkter Variation, so soll sein:

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) dg_1(x) - \int_a^b f(x) dg_2(x) .$$

$g_1(x)$ und $g_2(x)$ sind beide monoton ansteigend und werden nach der Gleichung (I,1) berechnet.

2. Das Stieltjes-Integral existiert auch dann, wenn $f(x)$ von beschränkter Variation ist. Es existiert ebenso, wenn $f(x)$ gleichmäßig beschränkt ist und maximal abzählbar viele Unstetigkeitsstellen in Form von Sprüngen besitzt. In beiden Fällen ist zu fordern, daß Sprungstellen von $f(x)$ nicht mit Sprungstellen von $g(x)$ zusammenfallen.

I.2.2 Die Definition des linearen stetigen Systems

I.2.2.1 Der lineare Operator. Ein linearer Operator auf dem Raum C der (in $x \in \bar{R}$) stetigen Funktionen ist eine Vorschrift, die jedem Element $f(x) \in C$ ein Element $\varphi(x) \in C$ zuordnet. Es gilt also:

$$\varphi(x) = T[f(x)] , \quad (I,2a)$$

wobei $T[f(x)]$ den Operator bezeichnet. Die Distributivität beim Operator wird genau in der gleichen Weise wie beim linearen Funktional erklärt. Der Operator ist beschränkt, wenn eine Zahl N existiert, so daß für alle $f(x) \in C$ gilt:

$$\|\varphi(x)\| = \|T[f(x)]\| \leq N \|f(x)\| . \quad (I,2b)$$

$\|T[f(x)]\|$ bezeichnet man als Norm des Operators.

Ein distributiver beschränkter Operator auf C heißt linearer Operator. Ein linearer Operator ist sicher stetig, denn aus $f_n(x) \rightarrow f(x)$ folgt $T[f_n(x)] \rightarrow T[f(x)]$. Die Konvergenz ist in beiden Fällen als gleichmäßig in $\bar{R}$ aufzufassen. Man kann einen linearen Operator auf C stets durch die Form

$$\varphi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d_x g(y, x) \quad (I,3)$$

darstellen [16]. $g(y, x)$ ist bezüglich x von beschränkter Variation und bezüglich y schwach stetig. Im Integral rechts von Gleichung (I,3) hat y die Bedeutung eines Parameters.

Bemerkungen:

a) Unter schwacher Stetigkeit versteht man die Bedingung

$$\lim_{y_n \rightarrow y_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d_x g(y_n, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d_x g(y_0, x)$$

für alle $y_0 \in \bar{R}$ und alle gegen y_0 konvergierenden Folgen.

b) Die Totalvariation von $g(y, x)$ bezüglich x berechnet sich zu

$$V_{-\infty}^{\infty}(g) = \int_{-\infty}^{\infty} |d_x g(y, x)| .$$

Wegen der Gültigkeit von Gleichung (I,3) ist stets die Bedingung $V_{-\infty}^{\infty}(g) < K < \infty$ erfüllt.

I.2.2.2 Das lineare stetige System

Definition: Ein System heißt linear und stetig, kurz linear, wenn zu allen Eingangssignalen $x(t) \in C$, $t \in \bar{R}$, die Ausgangssignale $y(t)$ durch einen linearen Operator auf C festgelegt sind.

Nach den Ausführungen im Abschnitt I.2.2.1 bedeutet dies, daß zur Beschreibung eines linearen stetigen Systems eine Funktion $g(t, \tau)$ existiert, die folgende Eigenschaften aufweist:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d_{\tau} g(t, \tau) , \quad (I,4a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |d_{\tau} g(t, \tau)| < M < \infty \text{ für alle } t \in \bar{R} \text{ (Stabilitätseigenschaft)}, (I,4b)$$

$$\lim_{t_n \rightarrow t} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d_{\tau} g(t_n, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d_{\tau} g(t, \tau) . \quad (I,4c)$$

Falls gilt

$$g(t, \tau) = 0 \text{ für } t < \tau ,$$

nennt man das System kausal.

Gilt

$$g(t, \tau) = g(t - \tau) ,$$

so nennt man das System zeitinvariant.

Beide Bezeichnungen sind plausibel, wählt man nämlich bei einem kausalen System ein Eingangssignal mit $x(t) = 0$ für $t < t_0$, so erhält man mittels Gleichung (I,4a) $y(t) = 0$ für $t < t_0$. Ist $x(t)$ das Eingangssignal, $y(t)$ das zugehörige Ausgangssignal des Systems, so reagiert ein zeitinvariantes System auf das verschobene Eingangssignal $x(t - t_0)$ mit der Antwort $y(t - t_0)$. Es besteht somit Invarianz der Ein- und Ausgangsbeziehung, wenn beide Signale um den gleichen Zeitabschnitt verschoben werden. Diese Aussage läßt sich ebenfalls mit Gleichung (I,4a) sehr einfach nachweisen.

Liegt ein System vor, bei dem sich eine Funktion $g(t, \tau)$ mit den geforderten Eigenschaften nur in einem endlichen Intervall $[a, b]$ finden läßt, so wird dieses System als linear im endlichen Intervall $[a, b]$ bezeichnet. Die Gleichungen (I,4a; I,4b; I,4c) gelten dann mit entsprechender Änderung der Integrationsgrenzen. Bei technischen Problemen stößt man häufig auf solche Systeme. Beispielsweise ist ein idealer Integrator ein nur in einem endlichen Zeitintervall lineares System.

Beim Integrator gilt:

$$y(t) = \int_a^t x(\tau) d_\tau g(t-\tau) \quad \text{mit} \quad g(t-\tau) = \begin{cases} -(t-\tau), & t > \tau \\ 0 & \text{f. } t < \tau \end{cases}; t, \tau \in [a, b].$$

Aus Gleichung (I,4b) erhält man die Stabilitätseigenschaft:

$$\int_a^b |d_\tau g(t-\tau)| \leq (b-a) < \infty.$$

Man erkennt sofort, daß Stabilität im Falle $a \rightarrow -\infty$ oder $b \rightarrow \infty$ nicht vorliegt, im Bereich $t, \tau \in \bar{R}$ ist damit nach der gegebenen Definition der Integrator kein lineares stetiges System.

Alle bisher gemachten Aussagen über lineare Systeme beschränkten sich auf den Fall stetiger Eingangssignale $x(t)$. Bei technischen Problemen treten jedoch sehr häufig nichtstetige Signale als Eingangsfunktionen für lineare Systeme auf. Eine Erweiterung der Theorie für Signale mit gewissen Unstetigkeiten ist daher notwendig. Es zeigt sich jedoch, daß diese Erweiterung erst durch die Einführung sogenannter verallgemeinerter Funktionen oder Distributionen möglich ist. Im nächsten Abschnitt sollen daher kurz einige, für die weiteren Untersuchungen wichtige Ergebnisse der Theorie der verallgemeinerten Funktionen angegeben werden.

I.2.3 Distributionen

I.2.3.1 Die Problemstellung. Probleme in der Physik und Technik führen oft zu Fällen, bei denen die Beschreibung durch Funktionen nicht sinnvoll ist. Zur einfacheren Behandlung solcher Aufgaben führt man verallgemeinerte Funktionen ein. Das folgende einfache Beispiel soll einen Fall zeigen, bei dem der Übergang zu Distributionen sinnvoll ist.

Längs einer Linie $a \leq x \leq b$ sei eine Ladung verteilt, die Ladungsdichte sei $u(x)$. Die gesamte Ladung Q längs der Linie wird be-

rechnet zu:

$$Q = \int_a^b u(x) dx .$$

Soll nun die gesamte Ladung Q im Punkt $x_0 \in (a,b)$ konzentriert auftreten, so muß sein $u(x) \equiv 0$ für $x \neq x_0$. Damit ist aber die Darstellung von Q durch das obenstehende Integral nicht mehr möglich. Es existiert nämlich keine Funktion, die bis auf einen einzigen Wert identisch verschwindet und gleichzeitig einen Integralwert $Q \neq 0$ liefert.

Als weiteres Beispiel wird die Aufgabe gestellt, eine Funktion $f(x)$ zu ermitteln, mit der Eigenschaft:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot F_i(x) dx = F_i(0) , i = 1, 2, \dots$$

Die Funktionen $F_i(x)$ sollen alle die Eigenschaft besitzen, daß sie für $|x| \rightarrow \infty$ stärker als jede Potenz x^{-N} , $N=1, 2, \dots$ nach 0 streben, sie sollen weiterhin beliebig oft differenzierbar sein. Line solche Funktion $f(x)$ existiert nicht. Man betrachtet zwei beliebige Funktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ mit $F_1(x) \neq F_2(x)$, aber $F_1(0) = F_2(0)$. Nun muß für alle Funktionen mit diesen Eigenschaften gelten:

$$F_1(0) - F_2(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) [F_1(x) - F_2(x)] dx = 0.$$

Dies ist aber nur bei $F_1(x) \equiv F_2(x)$ möglich und liefert einen Widerspruch zu der allgemeineren Annahme $F_1(x) \neq F_2(x)$, $F_1(0) = F_2(0)$.

Beide Probleme lassen sich durch die Einführung von verallgemeinerten Funktionen lösen. In den besprochenen Fällen ist diese verallgemeinerte Funktion die δ -Distribution, die auch die Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1; \quad \delta(x) = 0 \text{ für } x \neq 0$$

besitzt.

I.2.3.2 Definition der verallgemeinerten Funktion. Die folgenden Ausführungen lehnen sich im wesentlichen an die Darstellung von Lighthill [10] an. Nur die wichtigsten Ergebnisse werden, meist ohne Beweis, angegeben.

Definitionen:

1.) Eine Funktion heißt Grund- oder Testfunktion, wenn sie beliebig oft differenzierbar ist und mit allen Ableitungen eine Funktion $O(|x|^{-N})$ für $|x| \rightarrow \infty$ und alle N ist.

Anmerkung: Sie muß also mit allen Ableitungen stärker als jedes Polynom für $|x| \rightarrow \infty$ verschwinden. $F(x) = e^{-x^2}$ ist beispielweise eine

Testfunktion. Manchmal benötigt man Testfunktionen, die in einem abgeschlossenen endlichen Intervall beliebig oft differenzierbar sind, außerhalb dieses Intervalles aber identisch verschwinden.

$$F(x) = \begin{cases} e^{-a^2/(a^2-x^2)} & \text{f. } |x| \leq a \\ 0 & \text{f. } |x| > a \end{cases}$$

ist ein Beispiel für eine solche Funktion.

Ableitungen, Summen, Produkte von Testfunktionen sind wieder Testfunktionen. Auch die Fouriertransformierte einer Testfunktion ist wieder Testfunktion.

2.) Eine Funktion heißt schwach wachsend, wenn sie beliebig oft differenzierbar ist, und wenn sie mit allen Ableitungen eine Funktion $O(|x|^N)$ für $|x| \rightarrow \infty$ bei festem N ist.

Anmerkung: Jedes Polynom ist schwach wachsend. Das Produkt einer schwach anwachsenden Funktion und einer Testfunktion ist eine Testfunktion.

3.) Eine Folge $f_n(x)$ von Testfunktionen heißt regulär, wenn für jede Grundfunktion $F(x)$ der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) F(x) dx$$

existiert. Falls zwei Folgen $f_n(x)$ und $\bar{f}_n(x)$ für alle $F(x)$ den gleichen Grenzwert besitzen, heißen die Folgen äquivalent.

Anmerkung: Die Folge $f_n(x) = e^{-x^2/n^2}$ ist regulär, es gilt nämlich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/n^2} F(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx \quad \text{für alle } F(x).$$

Beweis: Für $n \geq N$ und $|x| < x_0$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß wird

$$|e^{-x^2/n^2} - 1| < \epsilon \quad (N^2 > x_0 / [\ln(1/(1-\epsilon))]) \text{ erfüllt diese Bedingung.}$$

Es muß gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)e^{-x^2/n^2} - F(x)| dx \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Dann erhält man die Ungleichung

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} F(x) (1 - e^{-x^2/n^2}) dx \right| \leq \epsilon \left| \int_{-x_0}^{x_0} F(x) dx \right| + \left| \int_{|x| > x_0} F(x) dx \right|.$$

Bei festem $\epsilon > 0$ und $N \rightarrow \infty$ geht auch $x_0 \rightarrow \infty$. Dann verschwindet der 2. Term, während der erste beliebig klein ist.

Man kann auf ähnliche Art beweisen, daß die Folgen $e^{-x^4/n}$, $e^{-\pi x^2/n}$ äquivalent zur Folge e^{-x^2/n^2} sind.

4.) Eine verallgemeinerte Funktion ist eine reguläre Folge $f_n(x)$ von Testfunktionen. Zwei verallgemeinerte Funktionen heißen gleich, wenn die entsprechenden regulären Folgen äquivalent sind.

Der Ausdruck

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot F(x) \cdot dx \quad (F(x) \text{ ist Testfunktion})$$

wird als Integral bezeichnet und definiert durch den Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) F(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot F(x) \cdot dx.$$

Anmerkung: $f(x)+h(x)$ wird durch die Folge $f_n(x)+h_n(x)$ definiert, wenn $f(x)$ und $h(x)$ Distributionen sind. $f'(x), f''(x), \dots$ wird durch $f'_n(x), f''_n(x), \dots$ definiert. Die Folge $s(x) \cdot f_n(x)$ definiert $s(x) \cdot f(x)$, wenn $s(x)$ eine schwach anwachsende Funktion ist.

Schließlich definiert man die Fouriertransformierte $g(y)$ der Distribution $f(x)$ durch die Folge $g_n(y)$, wenn $g_n(y)$ die Fouriertransformierte von $f_n(x)$ ist. Das Produkt von Distributionen ist im allgemeinen nicht sinnvoll erklärbar.

I.2.3.3 Die δ Distribution. Die Funktionenfolge

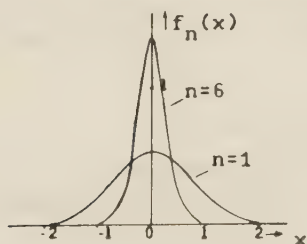


Bild 1

$$f_n(x) = e^{-nx^2} \cdot \sqrt{n/\pi} \quad (\text{vgl. Bild 1})$$

definiert die verallgemeinerte Funktion $\delta(x)$. Dabei gilt:

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot F(x) \cdot dx$$

für alle Testfunktionen $F(x)$.

Beweis:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} \cdot \sqrt{n/\pi} \cdot F(x) \cdot dx - F(0) \right| =$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} \cdot \sqrt{n/\pi} [F(x) - F(0)] \cdot dx \right| \leq \max |F'(x)| \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} \sqrt{n/\pi} |x| \cdot dx =$$

$$(\pi n)^{-1/2} \cdot \max |F'(x)| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Andere äquivalente Folgen zur Definition der δ Distribution erhält man folgendermaßen [9]. $g(x)$ sei eine Testfunktion mit der Eigenschaft:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot dx = 1.$$

Dann ist $ng(nx)$ gerade eine Folge, die $\delta(x)$ erklärt.

Satz: Es gilt für jede Grundfunktion $F(x)$ die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x) F(x) \cdot dx = (-1)^n F^{(n)}(0).$$

Der Beweis erfolgt durch partielle Integration unter Beachtung, daß beliebige Ableitungen von $F(x)$ wieder Testfunktionen sind. Die Folge für $\delta'(x)$ erhält man übrigens durch Ableitung der zu $\delta(x)$ gehörenden Folge. Ist $z(x)$ eine schwach ansteigende Funk-

tion, so gilt:

$$z(x) \cdot \delta(x) = z(0) \cdot \delta(x),$$

denn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) z(x) F(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) [z(x) F(x)] dx = z(0) \cdot F(0).$$

Es gilt weiter:

$$z(x) \cdot \delta'(x) = z(0) \cdot \delta'(x) - z'(0) \cdot \delta(x),$$

denn

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) z(x) F(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) [z(x) F(x)] dx = \\ &= -z(0) \cdot F'(0) - z'(0) \cdot F(0). \end{aligned}$$

Allgemeiner gilt:

$$z(x) \delta^{(\nu)}(x) = \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^{\mu} \binom{\nu}{\mu} z^{(\mu)}(0) \delta^{(\nu-\mu)}(x). \quad (I,5)$$

Die Fouriertransformierte von $\delta(x)$ erhält man folgendermaßen.

$f_n(x) = \sqrt{n/\pi} e^{-nx^2}$ ist eine Funktionenfolge für $\delta(x)$. Eine Folge, die die Fouriertransformierte von $\delta(x)$ erklärt, heißt dann:

$$g_n(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \cdot e^{-2\pi i x y} dx = e^{-\pi y^2/n}.$$

Nach Abschnitt I.2.3.2 gilt bei einer solchen Folge für alle $F(y)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(y) \cdot F(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) dy.$$

Daraus folgt, die Fouriertransformierte von $\delta(x)$ ist 1, also

$$F\{\delta(x)\} = 1.$$

Bemerkung: Entsprechend der Definition der Fouriertransformierten einer Distribution, ist auch diese wieder eine Distribution. $g(y)=1$ ist hier demnach als verallgemeinerte Funktion aufzufassen. Das deutet darauf hin, daß auch gewöhnliche Funktionen als Distributionen erklärbar sind.

I.2.3.4 Gewöhnliche Funktionen als Distributionen. $f(x)$ sei eine Funktion im üblichen Sinne mit der Eigenschaft, daß für ein bestimmtes N der Ausdruck $(1+x^2)^{-N} f(x)$ von $-\infty$ bis $+\infty$ absolut integrierbar ist. Für solche Funktionen lassen sich stets reguläre Funktionsfolgen $f_n(x)$ finden, so daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) F(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) F(x) dx$$

gilt, wenn $f(x)$ als Distribution aufgefaßt wird. Diese Distribution wird durch die Folge $f_n(x)$ erklärt.

Beispiele:

1.) $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{f. } x > 0 \\ -1 & \text{f. } x < 0 \end{cases}$ erfüllt obige Integrationsbedingung für $N=1$, $\operatorname{sgn} x$ ist daher als Distribution auffassbar. Also existiert auch eine Ableitung von $\operatorname{sgn} x$ als verallgemeinerte Funktion. Aus

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} \operatorname{sgn} x \cdot F(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x \cdot F'(x) dx = - \int_0^{\infty} F(x) dx + \int_{-\infty}^0 F(x) dx = 2 \cdot F(0)$$

erhält man:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sgn} x = 2\delta(x) .$$

2.) $f(x) = s(x) = \begin{cases} 1 & \text{f. } x > 0 \\ 0 & \text{f. } x < 0 \end{cases}$ kann ebenso als Distribution aufgefasst werden. Aus

$$s(x) = \frac{1}{2} (\operatorname{sgn} x + 1)$$

wird

$$\frac{d}{dx} s(x) = \delta(x) .$$

Definition:

$h(x)$ sei eine gewöhnliche, $f(x)$ eine verallgemeinerte Funktion. Es gelte für alle Testfunktionen, die außerhalb $[a, b]$ verschwinden

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) F(x) dx = \int_a^b h(x) F(x) dx .$$

Dann sagt man, die Distribution $f(x)$ stimmt im Intervall (a, b) mit der gewöhnlichen Funktion $h(x)$ überein, also

$$f(x) = h(x) \text{ in } x \in (a, b) .$$

So ist z.B. $\delta(x) = 0$ in $0 < x < \infty$; $-\infty < x < 0$. Gleiches gilt auch für die Ableitungen von $\delta(x)$.

I.2.3.5 Weitere Eigenschaften von Distributionen. Gilt für alle Testfunktionen aus der Klasse der geraden Testfunktionen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) F(x) dx = 0 ,$$

so wird $f(x)$ als ungerade Distribution bezeichnet. Beispielsweise ist $\delta'(x)$ ungerade, denn es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) F(x) dx = -F'(0) = 0 .$$

Da $F(x)$ gerade ist, ist nämlich $F'(0) = 0$. Sind $F(x)$ ungerade Testfunktionen und gilt die oben genannte Beziehung, so spricht man von geraden Distributionen. So ist z.B. $\delta(x)$ eine gerade Distribution.

Ist $f_t(x)$ eine Distribution für jeden Wert von t , ist außerdem

$f(x)$ eine Distribution, so schreibt man

$$\lim_{t \rightarrow c} f_t(x) = f(x),$$

wenn gilt

$$\lim_{t \rightarrow c} \int_{-\infty}^{\infty} f_t(x) F(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) F(x) dx.$$

t kann entweder nur ganze oder auch alle Zahlen durchlaufen, c kann auch ∞ sein. Unter diesen Bedingungen gilt ebenso

$$\lim_{t \rightarrow c} g_t(y) = g(y),$$

wobei $g_t(y)$ und $g(y)$ die Fouriertransformierten von $f_t(x)$ und $f(x)$ sind.

Beispiel: $f_t(x) = \sin(tx)/x, t=1, 2, \dots$ sind Distributionen. Wie lautet die Distribution $\lim_{t \rightarrow \infty} f_t(x)$? Die Fouriertransformierte $g_t(y)$ lautet:

$$g_t(y) = \begin{cases} 1 & \text{f. } y \in (-t/2, t/2) \\ 0 & \text{f. } |y| > t/2 \end{cases}.$$

Für $t \rightarrow \infty$ erhält man den Ausdruck $g(y) = 1$, dies ist aber die Fouriertransformierte der δ -Distribution. Daher gilt wegen der umkehrbar eindeutigen Zuordnung Distribution-Fouriertransformierte:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin tx}{x} = \delta(x).$$

I.2.3.6 Multiplikation von Distributionen. Im allgemeinen ist die Multiplikation von Distributionen nicht erlaubt. Treten bei Problemen formale Produkte von Distributionen auf, so sollen folgende Regeln gelten.

- 1.) $f(x)$ ist eine verallgemeinerte, $h(x)$ eine schwach anwachsende Funktion. Dann ist, wie vorne angegeben, auch das Produkt $z(x) = f(x)h(x)$ eine verallgemeinerte Funktion.
- 2.) $f(x)$ und $h(x)$ sind gewöhnliche Funktionen, die beide auch als Distributionen darstellbar sind. Dann kann man auch das Produkt $z(x) = f(x)h(x)$ als Distribution auffassen.
- 3.) $f(x)$ sei eine Distribution, $h(x)$ eine stetige Funktion mit $n \geq 0$ stetigen Ableitungen. Die Fälle 1 und 2 sollen nicht vorliegen. Dann werde $h(x)$ in einem beliebig groß zu wählenden Intervall (a, b) in den ersten n Ableitungen beliebig genau durch eine schwach anwachsende Funktion, etwa ein Polynom, approximiert. Ist $\bar{h}(x)$ die approximierende Funktion, so wird, statt des nicht definierten Produktes $z(x) = f(x)h(x)$ die nach Punkt 1 erklärte Distribution $\bar{z}(x) = f(x)\bar{h}(x)$ betrachtet. Solange bei der Rechnung Ausdrücke der Art $\bar{h}(x), \dots, \bar{h}^{(n)}(x)$ auftreten, sollen sie durch $h(x), \dots, h^{(n)}(x)$ ersetzt werden, da $\bar{h}(x) \approx h(x)$ in den ersten

n Ableitungen beliebig genau approximiert. Enthält die Distribution $\bar{z}(x)$ eine Ableitung $\bar{h}^{(i)}(x)$ mit $i > n$, so soll das Produkt $z(x)$ nicht erklärt sein.

4.) $h(x)$ sei eine Funktion, die auch als Distribution aufgefaßt werden kann und bei $x=0$ stetig ist. Ebenso kann $h(x)$ Distribution sein, die bei $x=0$ mit einer stetigen Funktion übereinstimmt. Wie soll der Ausdruck $h(x)\delta^{(v)}(x)$ verstanden werden? Ist $h(x)$ in n Ableitungen bei $x=0$ stetig, so wird ein Polynom $\bar{h}(x)$ betrachtet, das an der Stelle $x=0$ mit den ersten n Ableitungen von $h(x)$ übereinstimmt. Statt $h(x)\delta^{(v)}(x)$ wird der Ausdruck $\bar{h}(x)\delta^{(v)}(x)$ betrachtet, der stets definiert ist. Die bei der Auswertung nach Gleichung (I,5) auftretenden Ableitungen $\bar{h}^{(i)}(x)$ werden für $i \leq n$ durch $h^{(i)}(x)$ ersetzt. Der Ausdruck $h(x)\delta^{(v)}(x)$ ist im allgemeinen nur bis $v=n$ in der beschriebenen Art sinnvoll zu behandeln, da sonst keine Beziehung zur Ausgangsfunktion $h(x)$ existiert. Die beschriebene Festlegung ist sinnvoll, da für $x \neq 0$ die Distribution $\delta^{(v)}(x)$ mit der Funktion 0 übereinstimmt, so daß in diesem Bereich stets $h(x)\delta^{(v)}(x) = 0$ gilt. Betrachtet man statt $h(x)\delta^{(v)}(x)$ den Ausdruck $h(x)\delta^{(v)}(x-x_0)$, so gilt alles bisher gesagte für $x=x_0$, anstatt für $x=0$.

I.2.3.7 Integration. Integrale der Art

$$\int_a^b f(x) dx$$

sind nicht erklärt, wenn $f(x)$ verallgemeinerte Funktion ist. Man erhält jedoch leicht die Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

wenn $f(x)$ in $x \notin [a, b]$ mit der Funktion 0 gleichgesetzt wird, die Schreibweise $f(x)$ soll dabei nicht geändert werden. Die Frage lautet nun, wie und wann existiert ein Integral mit den Grenzen $-\infty, +\infty$ über eine Distribution.

Satz: Ist $f_n(x)$ eine reguläre Folge, die $f(x)$ erklärt, so existiert

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

wenn der Wert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx$$

existiert. Ist dies der Fall, so gilt

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx.$$

Diese Festlegung ist sinnvoll, bildet man nämlich die Fouriertransformierte $g(y)$ von $f(x)$, so erhält man formal $I=g(0)$. Diese Beziehung ist aber nur dann sinnvoll, wenn $g(y)$ in der Umgebung $y=0$ als stetige Funktion dargestellt werden kann. In diesem Fall ist $g(0)$ gerade der entsprechende Funktionswert.

Beispiel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1,$$

denn die Fouriertransformierte von $\delta(x)$ ist die Distribution $g(y)=1$. Sie ist aber auch als Funktion auffassbar, mit dem Funktionswert $g(0)=1$.

Eine wichtige Erweiterung der Rechenregeln bei Distributionen erhält man durch Einführung der Faltung von Distributionen. Dazu geht man folgendermaßen vor. Die Fouriertransformierten von $f(x)$ und $g(x)$ sollen $F(y)$ und $G(y)$ sein. $F(y)$ und $G(y)$ sollen derart sein, daß ihr Produkt $H(y)=F(y)G(y)$ definiert ist. Dies ist beispielweise immer der Fall, wenn $f(x)=\delta(x)$ und $g(x)$ eine beliebige Distribution ist. In diesem Fall ist nämlich $H(y)=G(y)$. Die Fourierrücktransformierte $h(x)=F^{-1}\{H(y)\}$ definiert nun die Faltung

$$h(x)=f(x)*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du.$$

Bei gewöhnlichen, absolut integrierbaren Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ stimmt diese Definition mit der üblichen Definition der Faltung überein.

Beispiel:

$$\delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)\delta(x-u)du,$$

denn es ist $H(y)=1$ und $F^{-1}\{1\}=\delta(x)$.

Als Ausblendeigenschaft der δ -Distribution bezeichnet man die Eigenschaft

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\delta(x-u)du.$$

$f(x)$ kann eine beliebige Distribution sein oder eine Funktion, die als Distribution darstellbar ist. Die Richtigkeit der Ausblendeigenschaft im Sinne der festgelegten Regeln folgt unmittelbar aus den obigen Bemerkungen.

I.2.4 Die Erweiterung auf nichtstetige Eingangssignale bei linearen Systemen

Nach diesen Bemerkungen über Distributionen, betrachten wir wieder die linearen Systeme, die durch die Gleichungen (I,4a; I,4b; I,4c) beschrieben werden. Die Funktion $g(t, \tau)$ in Gleichung (I,4a) ist bezüglich τ lt. Voraussetzung von beschränkter Variation. Daraus folgt, daß für alle $t \in \mathbb{R}$ $g(t, \tau)$ bezüglich τ gleichmäßig beschränkt ist [4].

$$g(t, \tau) \cdot \frac{1}{1+\tau^2}$$

ist somit für alle Werte von t absolut integrierbar und auch als Distribution erklärt. Es existiert im Sinne der Theorie der verallgemeinerten Funktionen die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [g(t, \tau)] = h(t, \tau) .$$

Als weitere Folge der Beschränktheit der Variation von $g(t, \tau)$ bzgl. τ ergibt sich, daß $g(t, \tau)$ höchstens abzählbar unendlich viele Sprungstellen haben kann [4]. Damit erhält man die Möglichkeit zu folgender Schreibweise

$$h(t, \tau) = h_1(t, \tau) + h_2(t, \tau) , \quad (I,6a)$$

wobei $h_1(t, \tau)$ eine Distribution ist, die auch als stückweise stetige Funktion aufgefasst werden kann. $h_2(t, \tau)$ hat die Form:

$$h_2(t, \tau) = \sum_{v=1}^{\infty} k_v(t) \delta(\tau - \tau_v) . \quad (I,6b)$$

Die τ_v in Gleichung (I,6b) dürfen abhängig von der Zeit t sein. Diese Abhängigkeit muß jedoch, ebenso wie die von $k_v(t)$ ($v=1,2,\dots$), stetig sein, da das System als Reaktion auf ein stetiges Eingangssignal $x(t)$ ein stetiges Ausgangssignal $y(t)$ liefert. Die Bedingung nach Gleichung (I,4b) führt zu den Stabilitätseigenschaften:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h_1(t, \tau)| d\tau < M < \infty \quad \text{f. alle } t , \quad (I,7a)$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} |k_v(t)| < N < \infty \quad \text{f. alle } t . \quad (I,7b)$$

Mit den so eingeführten Bezeichnungen erhält man aus (I,4a)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) x(\tau) d\tau . \quad (I,8)$$

Diese Darstellung gestattet nun eine sinnvolle Erweiterung der

Klasse der zulässigen Eingangssignale $x(t)$ über die Klasse der stetigen Funktionen hinaus. Folgende Funktionen $x(t)$ sollen als Eingangssignale zugelassen sein.

- 1.) Alle gleichmäßig beschränkten stetigen Funktionen $x(t)$.
- 2.) Alle gleichmäßig beschränkten Funktionen $x(t)$, die Unstetigkeitsstellen in Form von Sprüngen aufweisen dürfen, wenn diese Unstetigkeitsstellen nicht mit zeitunabhängigen Werten τ_v in der Gleichung (I,6b) zusammenfallen.
- 3.) Sind in der Gleichung (I,6b) alle τ_v Funktionen der Zeit t , so sind die Funktionen nach Punkt 2 ohne die dort genannten Einschränkungen bezüglich der Lage der Unstetigkeitsstellen zugelassen. Das Ergebnis $y(t)$ ist dann als Distribution aufzufassen.
- 4.) Distributionen $x(t)$, bei denen eine sinnvolle Auswertung der auftretenden Integrale möglich ist.

Bemerkungen zu diesen Punkten:

Die Voraussetzungen von Punkt 1 und 2 gestatten eine Anwendung sowohl von Gleichung (I,4a) als Stieltjes-Integral, als auch die Anwendung von Gleichung (I,8). Sind bei den Funktionen nach Punkt 3 die in der Gleichung (I,6b) auftretenden τ_v stetige Funktionen von t , so sind die bei der Berechnung von $y(t)$ entstehenden Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_v(t) \cdot x(\tau) \cdot \delta(\tau - \tau_v) d\tau = k_v(t) \cdot x[\tau_v(t)] = k_v(t) \cdot \bar{x}(t)$$

definiert. Ist hingegen eine der Größen τ_v ein fester zeitunabhängiger Wert, so muß $x(\tau_v)$ eine Stetigkeitsstelle von $x(t)$ sein, damit das Integral auswertbar ist.

Einfache Beispiele:

a) $g(t, \tau) = f(t)s(\tau)$, $f(t)$ sei stetig und gleichmäßig beschränkt, $s(\tau)$ ist die im Abschnitt I.2.3.4 erklärte Sprungfunktion. Das so beschriebene System ist linear und stetig. Man prüft leicht die schwache Stetigkeit bezüglich t und die beschränkte Variation bezüglich τ nach. Es gilt:

$$h(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} [g(t, \tau)] = f(t) \cdot \delta(\tau),$$

$$y(t) = f(t) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(\tau) d\tau = f(t) \cdot x(0) .$$

Voraussetzung ist hier, daß $x(t)$ bei $t=0$ stetig ist, so daß $x(0)$ existiert und $x(t)$ gegebenenfalls in der Umgebung von $x=0$

durch eine schwach anwachsende Funktion approximiert werden kann.

b) $g(t, \tau) = -s(t-\tau)$; wie man leicht nachprüft, handelt es sich hierbei ebenfalls um ein lineares System. Mit Hilfe der Funktion

$$h(t, \tau) = \delta(t-\tau),$$

erhält man

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau = x(t).$$

Voraussetzungen über Stetigkeitsstellen der Funktion $x(t)$ sind hier nicht erforderlich.

Schließlich noch eine Bemerkung zum Punkt 4. Eine Distribution, die stets eine sinnvolle Auswertung des Integrales erlaubt, ist die verallgemeinerte Funktion $x(t) = \delta(t-\psi)$. Physikalisch bedeutet dies, daß zum Zeitpunkt $t=\psi$ auf das System ein Dirac-Impuls einwirkt. Als Ergebnis erhält man

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-\psi) \cdot h(t, \tau) d\tau = h(t, \psi).$$

Die Integration ist nach den Ergebnissen vom Abschnitt I.2.3.7 stets gestattet. Da $h(t, \tau)$ offensichtlich die Reaktion des linearen stetigen Systems auf den "Eingangsimpuls" $\delta(t-\tau)$ ist, nennt man $h(t, \tau)$ die Impulsantwort des Systems. Sie ist normalerweise als verallgemeinerte Funktion aufzufassen.

I.2.5 Kausale Systeme, die Übertragungsfunktion

Alle physikalisch realisierbaren Systeme besitzen die Eigenschaft der Kausalität. Darunter versteht man die Bedingung, daß für $x(t) \equiv 0$ bei $t < t_0$ am Systemeingang keine Reaktion für $t < t_0$ am Systemausgang möglich ist. D.h., es gilt auch $y(t) \equiv 0$ für $t < t_0$. Physikalisch bedeutet dies, daß ein System auf eine Erregung nicht vor deren Eintreffen auf diese reagieren kann. Die Kausalitätseigenschaft führt auf die Bedingung:

$$h(t, \tau) \equiv 0 \text{ für } \tau > t.$$

Für kausale Systeme sind die in der Gleichung (I,6b) auftretenden τ , stets stetige Funktionen der Zeit t . Zulässige Eingangssignale für kausale lineare Systeme sind somit jedenfalls alle gleichmäßig beschränkten Funktionen $x(t)$, die maximal abzählbar unendlich viele Unstetigkeitsstellen in Form von Sprüngen haben dürfen.

Einige verallgemeinerte Funktionen, beispielsweise $x(t) = \delta(t-\tau)$, sind zusätzlich erlaubte Eingangssignale.

Wie vorne abgeleitet wurde, lauten die Stabilitätsbedingungen

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h_1(t, \tau)| d\tau < M < \infty \quad \text{f. alle } t,$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} |k_v(t)| < N < \infty \quad \text{f. alle } t.$$

Man kann sehr leicht nachweisen [20], daß diese Stabilitätsbedingungen identisch sind mit der folgenden Aussage.

Ein System ist dann und nur dann stabil, wenn ein gleichmäßig beschränktes Eingangssignal $x(t)$ ein wiederum gleichmäßig beschränktes Ausgangssignal zur Folge hat. Gilt also $|x(t)| < K_1$, so muß gelten $|y(t)| < K_2$. $P = K_2$.

Die Wahl von

$$x(t) = e^{i\omega t}$$

als Eingangssignal führt zur Definition der Übertragungsfunktion des Systems.

Die Einführung komplexwertiger Eingangssignale soll so erfolgen, daß Real- und Imaginärteil getrennt dem Operator unterworfen werden. Die Ergebnisse sind dann der Realteil bzw. der Imaginärteil des Ausgangssignales $y(t)$.

Die oben angegebene Funktion führt auf

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) e^{i\omega \tau} d\tau.$$

$$H(i\omega, t) = \left. \frac{y(t)}{x(t)} \right|_{x(t)=e^{i\omega t}}$$

nennt man die Übertragungsfunktion des Systems, wenn $y(t)$ die Reaktion auf das Signal $x(t) = e^{i\omega t}$ ist.

Man erhält

$$H(i\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) e^{-i\omega(t-\tau)} d\tau. \quad (I, 9a)$$

$H(i\omega, t)$ existiert, da $h(t, \tau)$ eine Fouriertransformierte (bzgl. τ) besitzt.

Neben der Impulsantwort, dient die Übertragungsfunktion häufig der Beschreibung linearer Systeme. Ist $X(i\omega)$ die Fouriertransformierte von $x(t)$, so erhält man mittels der Umkehrformel

$$h(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega, t) e^{i\omega(t-\tau)} d\omega; \quad (I, 9b)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega, t) X(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (I, 10)$$

Im Sonderfall zeitinvarianter Systeme, d.h. $h(t, \tau) = h(t - \tau)$, läßt sich die bekannte Beziehung

$$Y(i\omega) = H(i\omega) X(i\omega)$$

herleiten. $Y(i\omega)$ ist die Fouriertransformierte von $y(t)$. Die Zeitabhängigkeit der Übertragungsfunktion verschwindet in diesem Fall.

Die bis jetzt gemachten Aussagen über die Übertragungsfunktionen gelten für kausale und nichtkausale Systeme. Speziell für kausale Systeme gilt die folgende Aussage.

Setzt man $H(i\omega, t)$ durch analytische Fortsetzung auf die rechte komplexe Ebene fort, so ist bei stabilen kausalen Systemen $H(p, t)$ mit $p = \sigma + i\omega$ jedenfalls in der rechten Halbebene analytisch. Diese Eigenschaft wendet man sehr häufig zur Untersuchung der Stabilität von Systemen an. Sie hat besondere Bedeutung bei rationalen Übertragungsfunktionen.

I.3 Systeme, die durch lineare Differentialgleichungen beschrieben werden

I.3.1 Vorbemerkungen, die Existenz von Lösungen

Es sei ein System gegeben, das Ein- und Ausgangssignal durch die lineare Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + b_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + b_0(t)y(t) =$$

$$a_m(t)x^{(m)}(t) + \dots + a_0(t)x(t), \quad m \leq n \quad (I, 11a)$$

verkettet. In abgekürzter Schreibweise lautet der Zusammenhang

$$L(p, t) y(t) = R(p, t) x(t) \quad (I, 11b)$$

mit den Operatoren

$$L(p, t) = \sum_{v=0}^n b_v(t) p^v; \quad R(p, t) = \sum_{v=0}^m a_v(t) p^v, \quad p = \frac{d}{dt}. \quad (I, 11c)$$

In den meisten Fällen setzen wir voraus, daß der Koeffizient $b_n(t)$ vor der höchsten Ableitung von $y(t)$ gleich 1 ist. Gegebenenfalls läßt sich dies durch Division mit $b_n(t)$, $b_n(t) \neq 0$ vorausgesetzt, erreichen.

Die Bedingung $m \leq n$ in der Gleichung (I, 11a) ist aus Stabilitätsgründen nötig und wird später (Abschnitt I.3.4.2) erläutert.

Als weitere Voraussetzung wird angenommen, daß alle in der

Differentialgleichung auftretenden Koeffizienten $b_v(t)$, ($v=0,1, \dots, n-1$) stetige Funktionen in einem Intervall $[a,b]$ sind. Im folgenden wird Stetigkeit sogar in $[-\infty, \infty]$ verlangt, bei Ausnahmen erfolgt ein Hinweis. Voraussetzungen, die über die Koeffizienten $a_\mu(t)$ ($\mu=1 \dots m$) nötig sind, werden später präzisiert. Stetigkeit wird in allen Fällen gefordert.

Die Frage nach der Existenz von Lösungen der Differentialgleichung (I,11a) ist in der mathematischen Literatur in großem Umfange untersucht worden. Nach den oben genannten Voraussetzungen existieren jedenfalls Lösungen der homogenen Differentialgleichung (I,12). Aussagen über die Existenz von Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung erhält man unmittelbar durch die unten behandelte Greensche Funktion.

In den folgenden Abschnitten wird gezeigt, daß die Differentialgleichung (I,11a) unter einer gewissen Voraussetzung, nämlich der der Stabilität, ein lineares kausales System beschreibt.

I.3.2 Die Greensche Funktion

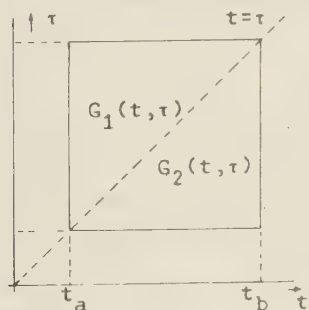


Bild 2

Mit

$$G_1(t, \tau) = G(t, \tau) \text{ in } t \in [t_a, \tau]; \tau \in (t, t_b] \quad (I,13)$$

$$G_2(t, \tau) = G(t, \tau) \text{ in } t \in (\tau, t_b]; \tau \in [t_a, t) \quad (I,13)$$

wird gesetzt

$$\frac{\partial^v}{\partial t^v} [G_2(t, \tau)]_{t=\tau+0} - \frac{\partial^v}{\partial t^v} [G_1(t, \tau)]_{t=\tau-0} = \begin{cases} 0 & \text{f. } v=0, \dots, n-2 \\ 1 & \text{f. } v=n-1 \end{cases} \quad (I,14)$$

Allgemein steht rechts in Gleichung (I,14) bei $v=n-1$ $1/b_n(\tau)$. $G(t, \tau)$ erfüllt nach Voraussetzung die homogene Differentialgleichung (I,12), daher gilt:

$$G_1(t, \tau) = K_{11}(\tau)y_1(t) + \dots + K_{1n}(\tau)y_n(t) , \quad (I,15)$$

$$G_2(t, \tau) = K_{21}(\tau)y_1(t) + \dots + K_{2n}(\tau)y_n(t) .$$

$y_v(t), (v=1 \dots n)$ sind n linear unabhängige Lösungen der Gleichung (I,12). Die Bedingungen nach der Gleichung (I,14) schränken die Wahl der $K_{1v}(\tau), K_{2v}(\tau), v=1 \dots n$ ein. Setzt man nämlich

$$\phi_v(\tau) = K_{2v}(\tau) - K_{1v}(\tau) , v=1, \dots, n , \quad (I,16a)$$

so erhält man aus Gleichung (I,15) mit (I,14)

$$\begin{aligned} \phi_1(\tau)y_1(\tau) + \dots + \phi_n(\tau)y_n(\tau) &= 0 \\ \phi_2(\tau)y_1'(\tau) + \dots + \phi_n(\tau)y_n'(\tau) &= 0 \\ \vdots & \\ \phi_n(\tau)y_1^{(n-1)}(\tau) + \dots + \phi_n(\tau)y_n^{(n-1)}(\tau) &= 1 \end{aligned} \quad (I,16b)$$

$$\phi_n(\tau)y_1^{(n-1)}(\tau) + \dots + \phi_n(\tau)y_n^{(n-1)}(\tau) = 1$$

Das Gleichungssystem (I,16b) läßt sich ohne Schwierigkeiten nach $\phi_v, (v=1 \dots n)$ auflösen, da die Determinante

$$W(\tau) = \begin{vmatrix} y_1(\tau) & \dots & y_n(\tau) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(\tau) & \dots & y_n^{(n-1)}(\tau) \end{vmatrix} \quad (I,17)$$

die Wronskische Determinante ist, die nach Voraussetzung nicht verschwindet.

Zur endgültigen Festlegung der Greenschen Funktion müssen noch n Funktionen $K_{1v}(\tau)$ oder $K_{2v}(\tau), (v=1 \dots n)$ berechnet werden. Hat man eine Greensche Funktion gefunden, die die oben genannten Bedingungen (I,14) bzw. (I,15), (I,16a; I,16b) erfüllt, so erhält man eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$L(p, t) y(t) = x(t) \quad (I,18)$$

durch den Ansatz:

$$y(t) = \int_a^t G(t, \tau) x(\tau) d\tau . \quad (I,19)$$

Bildet man nämlich

$$y^{(v)}(t) = \int_a^t \frac{\partial^v G_2(t, \tau)}{\partial t^v} x(\tau) d\tau + \int_t^b \frac{\partial^v G_1(t, \tau)}{\partial t^v} x(\tau) d\tau , v=1, \dots, (n-1) \quad (I,20)$$

$$y^{(n)}(t) = \int_a^t \frac{\partial^n G_2(t, \tau)}{\partial t^n} x(\tau) d\tau + \int_t^b \frac{\partial^n G_1(t, \tau)}{\partial t^n} x(\tau) d\tau + x(t) ,$$

so ergibt sich mit Gleichung (I,19)

$$\int_a^t [L(p, t) G_2(t, \tau)] x(\tau) d\tau + \int_t^b [L(p, t) G_1(t, \tau)] x(\tau) d\tau + x(t) = x(t) . \quad (I,21)$$

Da $G_1(t, \tau), G_2(t, \tau)$ die homogene Differentialgleichung erfüllen, verschwinden die beiden Integrale auf der linken Seite der Gleichung (I,21). $y(t)$ erfüllt also die inhomogene Differentialgleichung, unabhängig von den noch zu bestimmenden Funktionen $K_{1v}(\tau)$ oder $K_{2v}(\tau)$. Man kann leicht zeigen, daß sich diese Funktionen derart bestimmen lassen, daß die homogenen Randbedingungen

$$R_\mu[y] \equiv \sum_{v=0}^{n-1} [\alpha_{\mu v} y^{(v)}(t_a) + \beta_{\mu v} y^{(v)}(t_b)] = 0 \text{ für } \mu=1 \dots n \quad (\text{I,22})$$

erfüllt werden.

Für $\mu=1, \dots, n$ wird aus den Gleichungen (I,19) und (I,20):

$$\int_{t_a}^{t_b} x(\tau) \left[\sum_{v=0}^{n-1} \frac{\partial^v}{\partial \tau^v} [G_1(t_a, \tau)] \alpha_{\mu v} + \frac{\partial^v}{\partial \tau^v} [G_2(t_b, \tau)] \beta_{\mu v} \right] d\tau = 0. \quad (\text{I,23})$$

Daraus ergeben sich die Bedingungen [19]:

$$\sum_{v=0}^{n-1} \left[\frac{\partial^v}{\partial t^v} [G_1(t_a, \tau)] \alpha_{\mu v} + \frac{\partial^v}{\partial t^v} [G_2(t_b, \tau)] \beta_{\mu v} \right] = 0 \text{ für } \mu=1 \dots n. \quad (\text{I,24})$$

Zur weiteren Auswertung der Gleichung (I,24) wendet man sinnvoll die Matrixschreibweise an. Mit den Abkürzungen

$$G_1^{(v)} = \frac{\partial^v}{\partial t^v} [G_1(t, \tau)]_{t=t_a}, \quad G_2^{(v)} = \frac{\partial^v}{\partial t^v} [G_2(t, \tau)]_{t=t_b}$$

erhält man aus dem Gleichungssystem (I,24)

$$\begin{bmatrix} G_1^{(0)} & \dots & G_1^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{10} & \dots & \alpha_{1n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n0} & \dots & \alpha_{nn-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_2^{(0)} & \dots & G_2^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{10} & \dots & \beta_{1n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n0} & \dots & \beta_{nn-1} \end{bmatrix} = 0,$$

oder kurz

$$\begin{bmatrix} G_1^{(0)} & \dots & G_1^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \underline{\alpha} + \begin{bmatrix} G_2^{(0)} & \dots & G_2^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \underline{\beta} = 0. \quad (\text{I,25})$$

Die Bedeutung der Matrizen $\underline{\alpha}$ und $\underline{\beta}$ ist unmittelbar ersichtlich. Die beiden Zeilenvektoren in der Gleichung (I,25) lassen sich unter Beachtung der Gleichung (I,15) folgendermaßen anschreiben:

$$\begin{bmatrix} G_1^{(0)} & \dots & G_1^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t_a) \dots y_1^{(n-1)}(t_a) \\ \dots \\ y_n(t_a) \dots y_n^{(n-1)}(t_a) \end{bmatrix}, \quad (\text{I,26a})$$

$$\begin{bmatrix} G_2^{(0)} & \dots & G_2^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{21} & \dots & K_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t_b) \dots y_1^{(n-1)}(t_b) \\ \dots \\ y_n(t_b) \dots y_n^{(n-1)}(t_b) \end{bmatrix}. \quad (\text{I,26b})$$

Setzt man diese Ergebnisse in die Gleichung (I,25) ein, so erhält man mit Gleichung (I,16a):

$$[K_{11} \dots K_{1n}] (\gamma_a \cdot \underline{a} + \gamma_b \cdot \underline{b}) = -[\phi_1 \dots \phi_n] \cdot \gamma_b \cdot \underline{b}. \quad (I, 27)$$

Die Bedeutung der Matrix γ_a und γ_b ist direkt aus den Gleichungen (I, 26a; I, 26b) ersichtlich. Damit die Gleichung (I, 27) eindeutige Lösungen $K_{11}, \dots, K_{1n}$ besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß die Determinante der Matrix $\underline{C} = \gamma_a \underline{a} + \gamma_b \underline{b}$ nicht verschwindet. Man prüft leicht nach, daß sich die Matrix $\underline{C}$ als Produkt $\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B}$ darstellen läßt, wenn gilt:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} y_1(t_a) \dots y_1^{(n-1)}(t_a) & y_1(t_b) \dots y_1^{(n-1)}(t_b) \\ \vdots & \vdots \\ y_n(t_a) \dots y_n^{(n-1)}(t_a) & y_n(t_b) \dots y_n^{(n-1)}(t_b) \end{bmatrix}, \quad (I, 28a)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} a_{10} & \dots & a_{n0} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n-1} & \dots & a_{nn-1} \\ b_{10} & & b_{n0} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n-1} & \dots & b_{nn-1} \end{bmatrix}. \quad (I, 28b)$$

$\underline{A}$ ist eine spaltenreguläre $n \times 2n$ Matrix, die Matrix $\underline{B}$ soll zeilenregulär sein. In diesem Falle läßt sich zeigen, daß $\underline{C}$ den Rang n hat.

Zum einfacheren Beweis bezeichnen wir die Elemente der Matrizen $\underline{A}, \underline{B}$ abgekürzt mit a_{ik} , ($i=1 \dots n, k=1 \dots 2n$) sowie mit b_{ik} , ($i=1 \dots 2n, k=1 \dots n$) und setzen ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraus, daß die ersten n Zeilen von $\underline{B}$ eine nichtsinguläre Matrix bilden. Wir betrachten das Produkt

$$[\underline{a}_1 \dots \underline{a}_{2n}] \underline{B} = [\underline{c}_1 \dots \underline{c}_n],$$

wenn die $\underline{a}_v$, ($v=1 \dots 2n$) die aus den Spalten der Matrix $\underline{A}$ gebildeten Vektoren sind. Die Vektoren $\underline{c}_v$, ($v=1 \dots n$) sind genau dann linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$k_1 \underline{c}_1 + \dots + k_n \underline{c}_n = 0$$

nur die Lösungen $k_v = 0$ für $v=1 \dots n$ besitzt.

Mit

$$\underline{c}_v = \sum_{i=1}^{2n} a_i b_{iv}, \quad v=1 \dots n$$

wird

$$\sum_{v=1}^n k_v \underline{c}_v = \sum_{i=1}^{2n} a_i \cdot \sum_{v=1}^n k_v b_{iv} = 0.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der $\underline{a}_v$, ($v=1 \dots 2n$) voneinander, ist die Beziehung

$$\sum_{v=1}^n k_v b_{iv} = 0 \quad \text{f. } i=1, 2, \dots, 2n$$

erfüllt. Dieses Gleichungssystem hat für $i=1 \dots n$ die Form

$$[k_1 \dots k_n] \begin{bmatrix} b_{11} \dots b_{1n} \\ - \quad - \quad - \quad - \\ b_{n1} \dots b_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

und führt zu der Lösung $k_v=0$ für $v=1 \dots n$, da lt. Voraussetzung die Determinante der Matrix nicht verschwindet.

Damit ist bewiesen, daß die Gleichung (I,27) eindeutige Lösungen $K_{11}, \dots, K_{1n}$ besitzt, wenn nur gefordert wird, daß die Matrix B nach Gleichung (I,28b) den Rang n hat.

Das bedeutet, daß die Differentialgleichung (I,18) eine Lösung der Form (I,19) besitzt, und daß diese Lösung homogene, linear unabhängige Randbedingungen der Form (I,22) erfüllt.

I.3.3 Die einseitige Greensche Funktion, das adjungierte Problem

I.3.3.1 Die einseitige Greensche Funktion. Für die weiteren Untersuchungen ist ein Sonderfall von Gleichung (I,25) besonders interessant, nämlich der Fall $\beta=0$. Aus den Gleichungen (I,25) und (I,26a) erkennt man, daß sich die Lösung

$$\begin{aligned} K_{11} &= \dots = K_{1n} = 0 \\ K_{21} &= \phi_1, \dots, K_{2n} = \phi_n \end{aligned} \quad (I,29a)$$

ergibt. Eine andere Lösung ist nicht möglich, da nach unseren Voraussetzungen in diesem Fall die Matrix α nichtsingulär sein muß.

Die Lösung der Gleichung (I,15) lautet nun:

$$\begin{aligned} G_1(t, \tau) &= 0 \\ G_2(t, \tau) &= \phi_1(\tau)y_1(t) + \dots + \phi_n(\tau)y_n(t) \end{aligned} \quad (I,29b)$$

Das Randwertproblem geht in ein Anfangswertproblem mit den Anfangsbedingungen

$$y(t_a) = y'(t_a) = \dots = y^{(n-1)}(t_a) = 0 \quad (I,30)$$

über. Die Gültigkeit von Gleichung (I,30) ist leicht aus der Gleichung (I,20) für $t=t_a$, $G_1(t, \tau) = 0$ zu erkennen.

Aus den Beziehungen nach Gleichung (I,14) erhält man:

$$\frac{\partial^v}{\partial t^v} [G_2(t, \tau)]_{t=\tau+0} = \begin{cases} 0 & \text{für } v=0 \dots (n-2) \\ 1 & \text{für } v=n-1 \end{cases} \quad (I,31)$$

Gleichung (I,29b) liefert schließlich unter Beachtung von (I,16b) und (I,17):

$$G(t, \tau) \equiv 0 \text{ in } t \in [t_a, \tau), \tau \in (t, t_b],$$

$$G(t, \tau) = \frac{(-1)^n}{W(\tau)} \begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1(\tau) & \dots & y_n(\tau) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(\tau) & \dots & y_n^{(n-2)}(\tau) \end{vmatrix} \text{ in } t \in (\tau, t_b], \tau \in [t_a, t). \quad (I, 32)$$

$G(t, \tau)$ nach Gleichung (I,32) nennt man die einseitige Greensche Funktion. Falls die Lösungen $y_v(t)$, ($v=1 \dots n$) auch für Werte $t > t_b$ existieren, kann der Definitionsbereich von $G(t, \tau)$ auf einen größeren Bereich ausgedehnt werden.

I.3.3.2 Das adjungierte Problem. Der zum Differentialausdruck

$$L(p, t)y(t) = y^{(n)}(t) + b_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + b_0(t)y(t) \quad (I, 33a)$$

adjungierte Differentialausdruck, ist definiert durch:

$$L^*(p, t)y(t) = \sum_{v=0}^n (-1)^v \frac{\partial^v}{\partial t^v} [b_v(t)y(t)] \text{ mit } b_n(t) = 1. \quad (I, 33b)$$

Zwischen (I,33a) und (I,33b) gilt dann die Beziehung [18]:

$$\int [z(t)[L(p, t)y(t)] - y(t)[L^*(p, t)z(t)] dt = \Psi(y, z), \quad (I, 34)$$

worin ist:

$$\begin{aligned} \Psi(y, z) = & y [b_1 z - (b_2 z)' + \dots + (-1)^{n-1} z^{(n-1)}] + \\ & y' [b_2 z - (b_3 z)' + \dots + (-1)^{n-2} z^{(n-2)}] + \\ & \dots + \\ & y^{(n-2)} [b_{n-1} z - z'] + y^{(n-1)} z. \end{aligned} \quad (I, 35)$$

Setzt man in die Gleichung (I,34) $y(t) = G(t, \tau)$, $G(t, \tau)$ ist die einseitige Greensche Funktion, ein und integriert über den Bereich $\tau+0$ bis t , so erhält man

$$-\int_{\tau+0}^t G(t, \tau) \cdot [L^*(p, t)z(t)] dt = \Psi(G, z) \Big|_{t=\tau+0}^{t=t_b} \quad (I, 36)$$

Aus den Eigenschaften von $G(t, \tau)$ folgt die Gültigkeit von

$$\Psi[G(\tau+0, \tau), z(\tau)] = z(\tau). \quad (I, 37a)$$

Die Beziehung

$$\Psi[G(t_b, \tau), z(t_b)] = 0 \quad (I, 37b)$$

hat die Form $k_0 G(t_b, \tau) + \dots + k_{n-1} G^{(n-1)}(t_b, \tau) = 0$, wenn $k_{n-1} = z(t_b)$, $k_{n-2} = b_{n-1}(t_b)z(t_b) - z'(t_b)$ usw. ist.

Man erkennt, daß Gleichung (I,37b) nur erfüllt ist, wenn alle Konstanten k_v , $v=0 \dots (n-1)$ verschwinden und stellt fest, daß dies gerade durch die Bedingung

$$z(t_b) = z'(t_b) = \dots = z^{(n-1)}(t_b) = 0$$

erreicht wird.

Als Ergebnis der Auswertung von Gleichung (I,36) erhält man;

$$\int_{t_b}^{\tau} -G(t, \tau) [L^*(p, t)z(t)] dt = z(\tau), \quad (I,38a)$$

mit

$$z(t_b) = z'(t_b) = \dots = z^{(n-1)}(t_b) = 0. \quad (I,38b)$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit der vorne abgeleiteten Beziehung

$$\int_{t_a}^t G(t, \tau) [L(p, \tau)z(\tau)] d\tau = z(t) \quad (I,39a)$$

$$z(t_a) = z'(t_a) = \dots = z^{(n-1)}(t_a) = 0, \quad (I,39b)$$

so stellt man fest, daß

$$G^*(\tau, t) = -G(t, \tau) \quad (I,40)$$

die einseitige Greensche Funktion der adjungierten Differentialgleichung (I,33b) ist, wobei t und τ sowie t_a und t_b ihre Rollen vertauscht haben.

Der Definitionsbereich von $G^*(\tau, t)$ sowie der von $G(t, \tau)$ ist in Bild 3 dargestellt.

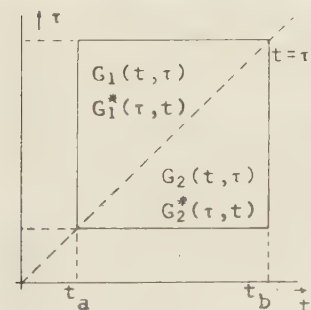


Bild 3

$$\begin{aligned} G(t, \tau) &= G_1(t, \tau) = 0 \quad \text{in } t \in [t_a, \tau], \tau \in (t, t_b] \\ G(t, \tau) &= G_2(t, \tau) \quad \text{in } t \in (\tau, t_b], \tau \in [t_a, t) \\ G^*(\tau, t) &= G_1^*(\tau, t) = 0 \quad \text{in } \tau \in (t, t_b], t \in [t_a, \tau] \\ G^*(\tau, t) &= G_2^*(\tau, t) \quad \text{in } \tau \in [t_a, t), t \in (\tau, t_b]. \end{aligned} \quad (I,41)$$

Für die Ableitungen von $G^*(\tau, t)$ nach τ findet man:

$$\frac{\partial^v}{\partial \tau^v} [G_2^*(\tau, t)]_{\tau=t-0} = \begin{cases} 0 & \text{f. } v=0 \dots (n-2) \\ (-1)^n & \text{f. } v=n-1 \end{cases} \quad (I,42)$$

Die Gleichungen (I,42) und (I,40) erlauben nun, mit den Ergebnissen nach Gleichung (I,31), die folgenden Ableitungseigenschaften der einseitigen Greenschen Funktion anzugeben:

$$\frac{\partial^v}{\partial t^v} [G(t, \tau)]_{\tau=t-} = \begin{cases} 0 & \text{f. } v=0 \dots (n-2) \\ 1 & \text{f. } v=n-1 \end{cases}; \quad \frac{\partial^v}{\partial \tau^v} [G(t, \tau)]_{t=\tau-} = \begin{cases} 0 & \text{f. } v=0 \dots (n-2) \\ (-1)^{n-1} & \text{f. } v=n-1 \end{cases} \quad (I,43)$$

I.3.4 Die Impulsantwort

I.3.4.1 Das System $L(p, t)y(t) = x(t)$. Noch immer wird die vereinfachte Differentialgleichung $L(p, t)y(t) = x(t)$ und die einseitige

Greensche Funktion $G(t, \tau)$ betrachtet. Es gilt daher:

$$y(t) = \int_{t_a}^{t_b} G(t, \tau) x(\tau) d\tau, t \in [t_a, t_b].$$

Nach den Voraussetzungen über die Stetigkeit der Koeffizientenfunktionen $b_v(t)$, ($v=0 \dots n$) in $t \in \bar{R}$, ist $G(t, \tau)$ fortsetzbar auf $t, \tau \in [\bar{t}_a, \bar{t}_b]$ mit $\bar{t}_a < t_a$ und $\bar{t}_b > t_b$.

Existiert der Grenzwert für $t_a \rightarrow -\infty, t_b \rightarrow +\infty$

$$\lim_{t_a \rightarrow -\infty, t_b \rightarrow +\infty} \int_{t_a}^{t_b} |G(t, \tau)| d\tau < M < \infty$$

für alle $t \in \bar{R}$, so ist ohne Schwierigkeit der Grenzübergang $t_a \rightarrow -\infty, t_b \rightarrow +\infty$ möglich, also wird:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad (I, 44a)$$

mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(t, \tau)| d\tau < M < \infty, t \in \bar{R}. \quad (I, 44b)$$

Offenbar beschreiben die Gleichungen (I, 44a; I, 44b) ein lineares stetiges System mit der Impulsantwort $h_0(t, \tau) = G(t, \tau)$. Das System ist sogar kausal, denn es gilt

$$\begin{aligned} h_0(t, \tau) &= G_1(t, \tau) = 0 \text{ f. } t < \tau, \\ h_0(t, \tau) &= G_2(t, \tau) \text{ f. } t > \tau. \end{aligned} \quad (I, 44c)$$

Ist die Ordnung der Differentialgleichung $n \geq 1$, der triviale Fall $n=0$ wird nicht beachtet, so ist $h_0(t, \tau)$ für $t > \tau$ eine überall stetige Funktion, bei $n \geq 2$ ist sie für alle Argumente t, τ stetig.

Die angegebene Lösung nach Gleichung (I, 44a) erfüllt, wie vorne gezeigt wurde, die Anfangsbedingungen

$$y(t_0) = \dots = y^{(n-1)}(t_0) = 0,$$

wenn gilt: $x(t) \equiv 0$ für $t < t_0$. Zusätzlich wird verlangt, daß $x(t)$ keine Anteile $\delta^{(v)}(t - t_0)$, ($v=0, 1, \dots$) enthält.

Im Abschnitt I.4.3.1 wird gezeigt, wie $G(t, \tau)$ abzuändern ist, damit andere, beliebig vorgebbare Anfangsbedingungen erfüllt werden.

I.3.4.2 Das System $L(p, t)y(t) = R(p, t)x(t)$. Setzt man in die Gleichung (I, 44a) statt $x(t)$ den Ausdruck $R(p, t)x(t)$ ein, so erhält man die Lösung der Differentialgleichung (I, 11b)

$$L(p, t)y(t) = R(p, t)x(t).$$

Die Koeffizienten $a_v(t)$, ($v=0 \dots m$) im Operator $R(p, t)$ sollen überall stetig sein, ihre v -ten Ableitungen sollen stückweise stetig sein und neben Sprungstellen allenfalls Terme

$k_i \delta(t-t_i), i=1, 2, \dots$ enthalten. Dann wird:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(t, \tau) \sum_{v=0}^m a_v(\tau) \frac{d^v x(\tau)}{d\tau^v} d\tau. \quad (I, 45)$$

Die Auswertung von Gleichung (I, 45) führt auf Integrale der Art

$$I_v = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} h_0(t, \tau) a_v(\tau) x^{(v)}(\tau) d\tau, v=0, \dots, m.$$

Wiederholte partielle Integration liefert

$$I_v = (-1)^v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^v}{\partial \tau^v} [h_0(t, \tau) a_v(\tau)] x(\tau) d\tau,$$

wobei gilt:

$$\left. \frac{\partial^\mu}{\partial \tau^\mu} [h_0(t, \tau) a_v(\tau)] x^{(\mu)}(\tau) \right|_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} = 0, \mu = 0, \dots, (v-1).$$

Zum Beweis betrachtet man die Kausalitätsbedingung für $\tau=\infty$ und die Stabilitätseigenschaft für $\tau=-\infty$. Dabei ist zu beachten, daß $h_0(t, \tau)$ sicher $n-1$ stetige Ableitungen nach t und τ besitzt ($t \neq \tau$). Faßt man die angegebenen Ergebnisse zusammen, so wird

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) \cdot x(\tau) d\tau, \quad (I, 46a)$$

mit

$$h(t, \tau) = a_0(\tau) h_0(t, \tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} [a_1(\tau) h_0(t, \tau)] + \dots + (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial \tau^m} [a_m(\tau) h_0(t, \tau)] \quad (I, 46b)$$

die Lösung der Differentialgleichung (I, 11b).

Zur weiteren Untersuchung der Impulsantwort $h(t, \tau)$ wird gesetzt:

$$h_0(t, \tau) = \bar{h}_0(t, \tau) \cdot s(t-\tau). \quad (I, 47)$$

Damit ist für $t > \tau$ $\bar{h}_0(t, \tau) \equiv h_0(t, \tau)$, für $t < \tau$ soll $\bar{h}_0(t, \tau)$ beliebig sein, allerdings sollen die ersten n Ableitungen nach beiden Variablen bei $t=\tau$ stetig verlaufen.

Setzt man die Gleichung (I, 47) in die Gleichung (I, 46b) ein, so erhält man Summanden der Form:

$$S_v(t, \tau) = (-1)^v \frac{\partial^v}{\partial \tau^v} [a_v(\tau) s(t-\tau) \bar{h}_0(t, \tau)], v=0 \dots m. \quad (I, 48a)$$

Wendet man hierauf die Differentiationsregel

$$\frac{d^v}{dx^v} [u(x) v(x)] = \sum_{k=0}^v \binom{v}{k} u^{(k)}(x) v^{(v-k)}(x) \quad (I, 49)$$

an, so wird:

$$S_v(t, \tau) = (-1)^v \sum_{k=0}^v \binom{v}{k} \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} [s(t-\tau)] \frac{\partial^{v-k}}{\partial \tau^{v-k}} [a_v(\tau) \bar{h}_0(t, \tau)]. \quad (I, 48b)$$

Nun ist

$$\frac{\partial^k}{\partial \tau^k} [s(t-\tau)] = - \frac{\partial^{k-1}}{\partial \tau^{k-1}} [\delta(t-\tau)]$$

und

$$\delta^{(v)}(t-\tau)f(\tau) = \sum_{k=0}^v (-1)^v \binom{v}{k} f^{(k)}(t) \delta^{(v-k)}(t-\tau), \text{ vgl. Gl. (I,5).}$$

Unter Beachtung der beiden letzten Beziehungen ergibt sich aus der Gleichung (I,48b) :

$$S_v(t, \tau) = (-1)^v s(t-\tau) \frac{\partial^v}{\partial \tau^v} [a_v(\tau) \bar{h}_0(t, \tau)] -$$

$$(-1)^v \sum_{k=1}^v \binom{v}{k} \sum_{\mu=0}^{k-1} (-1)^\mu \binom{k-1}{\mu} \delta^{(k-1-\mu)}(t-\tau) \frac{\partial^{v-k+\mu}}{\partial \tau^{v-k+\mu}} [a_v(\tau) \bar{h}_0(t, \tau)]_{t=\tau} \quad (\text{I,48c})$$

Im Falle $v < n$ verschwinden in dieser Summe alle Ableitungen von $\bar{h}_0(t, \tau)$. Dann vereinfacht sich die Gleichung (I,48c) zu:

$$S_v(t, \tau) = (-1)^v s(t-\tau) \frac{\partial^v}{\partial \tau^v} [a_v(\tau) \bar{h}_0(t, \tau)], v=0, 1, \dots, m < n. \quad (\text{I,49a})$$

Der Fall $v=m=n, a_n(t) \neq 0$ vorausgesetzt, führt auf die etwas kompliziertere Form

$$S_n(t, \tau) = (-1)^n s(t-\tau) \frac{\partial^n}{\partial \tau^n} [a_n(\tau) \bar{h}_0(t, \tau)] -$$

$$(-1)^n \delta(t-\tau) \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau^{n-1}} [a_n(\tau) \bar{h}_0(t, \tau)]_{t=\tau}.$$

Die Beziehung

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k-1} = 1$$

führt schließlich auf das Ergebnis:

$$S_n(t, \tau) = (-1)^n s(t-\tau) \frac{\partial^n}{\partial \tau^n} [a_n(\tau) \bar{h}_0(t, \tau)] + a_n(t) \delta(t-\tau). \quad (\text{I,49b})$$

Die Impulsantwort hat somit die Form:

$$h(t, \tau) = s(t-\tau) [a_0(\tau) \bar{h}_0(t, \tau) + \dots + (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial \tau^m} [a_m(\tau) \bar{h}_0(t, \tau)]] + a_n(t) \delta(t-\tau). \quad (\text{I,50})$$

Ein Impulsanteil $\delta(t-\tau)$ tritt offenbar nur im Falle $a_n(t) \neq 0$, also bei $m=n$ auf.

Nun läßt sich auch leicht die Notwendigkeit der Bedingung $m \leq n$ einsehen, die schon im Abschnitt I.3.1 formuliert wurde. Wäre beispielsweise $m=n+1$, so würde $h(t, \tau)$ einen Anteil der Form $k(t) \delta'(t-\tau)$ enthalten. In der Impulsantwort eines linearen stetigen Systems ist aber ein solcher Anteil nicht statthaft. Aus dem gleichen Grunde gelten auch die vorne formulierten Stetigkeitsanforderungen an die Koeffizientenfunktionen $a_v(t)$, ($v=0 \dots m$). Diese gewährleisten nämlich, daß durch die Differen-

tation der Funktionen $a_v(t)$ in der Gleichung (I,50) allenfalls Terme der Art $k\delta(t-t_0)h_0(t,t_0)$ entstehen können. t_0 ist dabei eine Stelle, bei der die $(v-1)$ te, $(v=2,3,\dots)$ Ableitung des Koeffizienten $a_v(t)$ eine Unstetigkeitsstelle in Form eines Sprunges besitzt.

Zusammenfassend gilt also für die Impulsantwort eines Systems, das durch eine lineare Differentialgleichung beschrieben wird, folgendes. Erfüllen die Koeffizienten $a_v(t)$ die vorne angegebenen Stetigkeitsbedingungen, so kann $h(t,\tau)$ maximal abzählbar unendlich viele Anteile $k \cdot h_0(t,\tau) \cdot \delta(\tau-t_v)$ enthalten, wenn die $(v-1)$ te Ableitung der Koeffizienten $a_v(t)$ an den Stellen t_v Unstetigkeitsstellen in Form von Sprüngen besitzen. Weiterhin tritt im Falle $m=n$ ein Anteil $a_n(t) \cdot \delta(t-\tau)$ auf. Sind die Funktionen $a_v(t)$ stetig bis zur $(v-1)$ ten Ableitung, so ist der Anteil $a_n(t) \cdot \delta(t-\tau)$ der einzige Term dieser Art. Im folgenden wird die Existenz von $(v-1)$ stetigen Ableitungen der Funktionen $a_v(t)$ stets vorausgesetzt.

I.4 Eine Methode zur Berechnung der Impulsantwort

I.4.1 Vorbemerkungen und Voraussetzungen

Die folgenden Ausführungen beziehen sich ausschließlich auf lineare Systeme, die durch lineare Differentialgleichungen beschrieben werden. Solche Systeme wurden bereits im Abschnitt I.3 behandelt. Hier wird ein Verfahren angegeben, das die praktische Bestimmung der Impulsantwort erlaubt.

Das Verfahren setzt Bedingungen voraus, die an die Koeffizienten $b_v(t)$, $(v=0\dots n)$ zu stellen sind.

Voraussetzung: Die Koeffizientenfunktionen $b_v(t)$, $(v=0\dots n)$ sollen bei $t=t_0$ in unendliche Taylorreihen entwickelbar sein. Die Reihen sollen im gesamten interessierenden Zeitbereich, d.h. normalerweise in $[-\infty, \infty]$ konvergieren.

Besondere Voraussetzungen über die Koeffizientenfunktionen $a_v(t)$, $(v=0\dots m)$ sind nicht notwendig, es wird auf die Angaben im Abschnitt I.3.4.2 verwiesen.

Die genannten Voraussetzungen über die Funktionen $b_v(t)$ werden im ersten Moment als sehr einschränkend für die Anwendung eines Verfahrens empfunden. Bekanntlich ist aber eine Approximation

der $b_v(t)$ in beliebig großen Intervallen mit beliebiger Genauigkeit möglich, da die zu approximierenden Funktionen stetig sind.

Liegt beispielsweise ein System mit periodischen Koeffizientenfunktionen vor, die Perioden können abhängig von den Indizes sein, und liegen die genannten Voraussetzungen über die Entwicklung in Taylorreihen nicht vor, so erhält man folgendermaßen eine geeignete Approximation. Die Funktionen $b_v(t)$, ($v=0 \dots n$) werden beliebig genau durch endliche Fourierreihen approximiert. Diese endlichen Reihen erfüllen dann bereits die erforderlichen Voraussetzungen.

I.4.2 Die Beschreibung des Verfahrens

$h_o(t, \tau)$ erfüllt die homogene Differentialgleichung

$$L(p, t)y(t) = 0 \text{ f. } t > \tau$$

und es gelten die Anfangsbedingungen

$$\frac{\partial^v}{\partial t^v} [\bar{h}_o(t, \tau)] = \begin{cases} 0 & \text{f. } v=0 \dots (n-2) \\ 1 & \text{f. } v=n-1 \end{cases} \quad (I, 51)$$

$\bar{h}_o(t, \tau)$ wurde durch die Beziehung (I, 47) eingeführt.

Wird in der Gleichung

$$\bar{h}_o^{(n)}(t, \tau) + b_{n-1}(t) \bar{h}_o^{(n-1)}(t, \tau) + \dots + b_o(t) \bar{h}_o(t, \tau) = 0, t \geq \tau$$

jeder Summand μ mal nach t differenziert, so erhält man den Ausdruck:

$$\sum_{v=0}^{\mu} \binom{\mu}{v} b_n^{(v)}(t) \bar{h}_o^{(n+\mu-v)}(t, \tau) + \dots + \sum_{v=0}^{\mu} \binom{\mu}{v} b_o^{(v)}(t) \bar{h}_o^{(\mu-v)}(t, \tau) = 0 \quad \text{f. } t \geq \tau.$$

Die letzte Beziehung wurde für $b_n(t) \neq 1$ angegeben. Eine geeignet gewählte Änderung der Indizes führt auf die Form:

$$\sum_{v=0}^{\mu+n} \binom{\mu}{v} b_n^{(v)}(t) \bar{h}_o^{(n+\mu-v)}(t, \tau) + \dots + \sum_{v=n}^{\mu+n} \binom{\mu}{v-n} b_o^{(v-n)}(t) \bar{h}_o^{(n+\mu-v)}(t, \tau) = 0.$$

Die Summanden in dieser Gleichung lassen sich zusammenfassen, es wird:

$$\sum_{v=0}^{\mu+n} \bar{h}_o^{(n+\mu-v)}(t, \tau) \left[\binom{\mu}{v} b_n^{(v)}(t) + \binom{\mu}{v-1} b_{n-1}^{(v-1)}(t) + \dots + \binom{\mu}{v-n} b_o^{(v-n)}(t) \right] = 0. \quad (I, 52)$$

Die Existenz aller in der Gleichung (I, 52) auftretenden Ableitungen ist durch unsere Voraussetzungen gesichert.

Löst man die Gleichung (I, 52) nach der höchsten Ableitung von

$\bar{h}_0(t, \tau)$ auf, so wird für $t \geq \tau$:

$$\bar{h}_0^{(n+\mu)}(t, \tau) = -\frac{1}{b_n(t)} \sum_{v=1}^{n+\mu} \bar{h}_0^{(n+\mu-v)}(t, \tau) \left[\binom{\mu}{v} b_n^{(v)}(t) + \dots + \binom{\mu}{v-n} b_0^{(v-n)}(t) \right]. \quad (I, 53)$$

Mittels der Gleichung (I, 53) läßt sich die $(n+\mu)$ te Ableitung von $\bar{h}_0(t, \tau)$ nach t finden, wenn alle niedrigeren Ableitungen bekannt sind. Speziell für $t = \tau$ wird

$$\bar{h}_0^{(n+\mu)}(\tau, \tau) = -\frac{1}{b_n(\tau)} \sum_{v=1}^{n+\mu} \bar{h}_0^{(n+\mu-v)}(\tau, \tau) \left[\binom{\mu}{v} b_n^{(v)}(\tau) + \dots + \binom{\mu}{v-n} b_0^{(v-n)}(\tau) \right]. \quad (I, 54)$$

Im Falle $\mu=0$ sind die in Gleichung (I, 54) rechts auftretenden Ableitungen durch die Gleichung (I, 51) gegeben, $\bar{h}_0^{(n)}(\tau, \tau)$ kann berechnet werden. Wird in (I, 54) dann $\mu=1$ gesetzt, so findet man $\bar{h}_0^{(n+1)}(\tau, \tau)$ usw. .

Schrittweise lassen sich auf diese Art alle endlichen Ableitungen von $\bar{h}_0(t, \tau)$ nach t bei $t = \tau$ ermitteln.

Es wird nun behauptet, daß die unendliche Reihe

$$R_0(t, \tau) = \bar{h}_0(\tau, \tau) + \bar{h}_0'(\tau, \tau) \frac{(t-\tau)}{1!} + \bar{h}_0''(\tau, \tau) \frac{(t-\tau)^2}{2!} + \dots \quad (I, 55a)$$

für alle Werte von t , interessant ist nur der Bereich $t > \tau$, konvergiert und daß gilt:

$$R_0(t, \tau) = \bar{h}_0(t, \tau) \text{ für } t \geq \tau. \quad (I, 55b)$$

Zum Beweis sei an die Lösung linearer Differentialgleichungen durch Reihenansatz erinnert [15]. Lassen sich nämlich die Koeffizienten $b_v(t)$, ($v=0 \dots n$) einer linearen Differentialgleichung bei $t = \tau_0$ in eine Taylorreihe entwickeln, so ist auch die homogene Lösung dieser Differentialgleichung als Taylorreihe darstellbar. Der Konvergenzradius der Lösungsreihe ist gerade so groß, wie der kleinste Konvergenzradius der Koeffizientenreihen. In unserem Falle konvergieren diese Reihen überall, so daß auch die Lösungsreihe überall konvergieren würde. Als Potenzreihe liegt sogar eine absolut konvergente Reihe vor, die bekanntlich beliebig umgeordnet werden kann.

Gleichung (I, 55a) stellt eine solche umgeordnete Potenzreihe dar, sie konvergiert ebenfalls absolut für alle Werte von t . Da die für $\bar{h}_0(t, \tau)$ vorgeschriebenen Anfangsbedingungen erfüllt sind, gilt auch die Beziehung (I, 55b).

Die Impulsantwort hat die Form:

$$h_0(t, \tau) = s(t-\tau) \bar{h}_0(t, \tau) = s(t-\tau) \sum_{v=n-1}^{\infty} c_v(\tau) \frac{(t-\tau)^v}{v!} \quad (I, 56)$$

mit

$$c_v(\tau) = \frac{\partial^v}{\partial \tau^v} [\bar{h}_0(t, \tau)]_{\tau=t}.$$

$h(t, \tau)$ berechnet man schließlich aus $h_0(t, \tau)$ durch Anwendung der Gleichung (I,50).

I.4.3 Die Lösung homogener linearer Differentialgleichungen mit beliebigen Anfangsbedingungen

I.4.3.1 Die Methode. Das vorne beschriebene Verfahren zur Berechnung von $\bar{h}_0(t, \tau)$ kann auch zur Lösung linearer homogener Differentialgleichungen mit beliebigen Anfangsbedingungen verwendet werden.

Gegeben sei die Differentialgleichung:

$$b_n(t)y^{(n)}(t) + b_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + b_0(t)y(t) = 0. \quad (I,57a)$$

Gesucht wird $y(t)$, wenn die Anfangsbedingungen

$$y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0) \quad (I,57b)$$

vorgeschrieben sind.

Die Funktionen $b_v(t)$, ($v=0 \dots n$) sollen die im Abschnitt I.4.1 genannten Bedingungen erfüllen.

Lauten die Anfangsbedingungen

$$y(t_0) = y'(t_0) = \dots = y^{(n-2)}(t_0) = 0, \quad y^{(n-1)}(t_0) = 1,$$

so liegt die gesuchte Lösung bereits in $h_0(t, \tau)$ vor, man wählt zur numerischen Bestimmung der in der Gleichung (I,56) auftretenden Koeffizienten $\tau = t_0$.

Die Lösung des allgemeineren Problems entsprechend den Gleichungen (I,57a; I,57b), erfolgt so, daß die Differentialgleichung

$$b_n(t)y^{(n)}(t) + \dots + b_0(t)y(t) = \sum_{\mu=0}^{n-1} k_\mu \delta^{(\mu)}(t-t_0) \quad (I,58)$$

betrachtet wird (vgl. auch [21]). Für $t > t_0$ stimmt die Gleichung (I,58) mit (I,57a) überein. Die Konstanten k_μ werden so bestimmt, daß die Gleichung (I,57b) erfüllt ist.

Die Lösung von Gleichung (I,58) lautet:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(t, \tau) \sum_{\mu=0}^{n-1} k_\mu \delta^{(\mu)}(\tau-t_0) d\tau, \quad t > t_0,$$

daraus erhält man

$$y(t) = \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^\mu k_\mu \frac{\partial^\mu}{\partial \tau^\mu} [\bar{h}_0(t, \tau)]_{\tau=t_0}, \quad t > t_0. \quad (I,59)$$

Leitet man $y(t)$ ρ -mal, ($\rho \leq n-1$) nach der Zeit t ab, so findet man

$$y^{(\rho)}(t) = \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{\mu} k_{\mu} \bar{h}_{ot,\tau}^{(\rho,\mu)}(t,\tau) \Big|_{\tau=t_0}, \quad \rho=0 \dots (n-1). \quad (I, 60a)$$

Für $t=t_0$ wird

$$y^{(\rho)}(t_0) = \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{\mu} k_{\mu} \bar{h}_{ot,\tau}^{(\rho,\mu)}(t_0, t_0), \quad \rho=0 \dots (n-1). \quad (I, 60b)$$

Es zeigt sich, daß die Faktoren k_{μ} , ($\mu=0, \dots, n-1$) in der Gleichung (I, 60b) eindeutig bestimmbar sind, wenn beliebige Anfangswerte $y^{(v)}(t_0)$, ($v=0, \dots, n-1$) vorliegen.

Zur Berechnung von $\bar{h}_{ot,\tau}^{(\rho,\mu)}(t_0, t_0)$ geht man günstig von der Reihendarstellung

$$h_o(t, \tau) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v(\tau) \frac{1}{v!} (t-\tau)^v \quad (I, 61)$$

aus. Leitet man Gleichung (I, 61) ρ -mal nach t und μ -mal nach τ ab, so wird nach einigen Zwischenschritten:

$$\bar{h}_{ot,\tau}^{(\rho,\mu)}(t, \tau) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\mu} \binom{v}{\rho} \binom{\mu}{k} \binom{v-\rho}{\mu-k} \frac{\rho! (\mu-k)!}{v!} (-1)^{\mu-k} c^{(k)}(\tau) \cdot (t-\tau)^{v-\rho-\mu+k}. \quad (I, 62)$$

Setzt man nun $t=\tau$, so vereinfacht sich dieser Ausdruck wesentlich, da nichtverschwindende Summanden nur bei $v-\rho-\mu+k=0$ auftreten:

$$\bar{h}_{ot,\tau}^{(\rho,\mu)}(\tau, \tau) = (-1)^{\rho} \sum_{v=0}^{\rho+\mu} (-1)^v \binom{\mu}{\rho+\mu-v} c_v^{(\rho+\mu-v)}(\tau). \quad (I, 63)$$

Speziell für $\mu=0$ bzw. $\rho=0$ erhält man:

$$\bar{h}_{ot}^{(\rho)}(\tau, \tau) = c_{\rho}(\tau),$$

$$\bar{h}_{ot}^{(\mu)}(\tau, \tau) = \sum_{v=0}^{\mu} (-1)^v \binom{\mu}{v} c_v^{(\mu-v)}(\tau).$$

Da für $\rho+\mu < n-1$ alle in der Gleichung (I, 63) auftretenden Faktoren $c_v(\tau)$ verschwinden, gilt

$$\frac{\partial^{\rho+\mu}}{\partial t^{\rho} \partial \tau^{\mu}} [\bar{h}_o(t, \tau)]_{t=\tau} = \begin{cases} 0 & \text{für } \rho+\mu < n-1 \\ (-1)^{\rho} (-1)^{n-1} / b_n(\tau) & \text{für } \rho+\mu = n-1 \end{cases} \quad (I, 64)$$

Mit den Abkürzungen

$$a_{\rho\mu} = \frac{\partial^{\rho+\mu}}{\partial t^{\rho} \partial \tau^{\mu}} [\bar{h}_o(t, \tau)]_{t=\tau=t_0}, \quad (I, 65a)$$

$$y_v = y^{(v-1)}(t_0) \quad \text{für } v=1, \dots, n-1 \quad (I, 65b)$$

erhält man aus der Gleichung (I, 60b) unter Berücksichtigung der Gleichung (I, 64) das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= (-1)^{n-1} \cdot k_{n-1} \cdot a_{0n-1} \\
 y_2 &= (-1)^{n-1} \cdot k_{n-1} \cdot a_{1n-1} + (-1)^{n-2} \cdot k_{n-2} \cdot a_{1n-2} \\
 &\dots \\
 y_n &= (-1)^{n-1} \cdot k_{n-1} \cdot a_{n-1n-1} + \dots + (-1)^0 \cdot k_0 \cdot a_{n-10} .
 \end{aligned} \tag{I,66}$$

Notwendig und hinreichend für die Existenz eindeutiger Lösungen $k_0 \dots k_{n-1}$ ist eine nichtverschwindende Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems. Diese lautet bei Beachtung der Gleichung (I,64)

$$D = \left[\frac{1}{b_n(t_0)} \right]^n \neq 0,$$

da $b_n(t) \neq 0$ im interessierenden Bereich vorausgesetzt wurde. Die Lösung der Gleichung (I,66) erhält man schrittweise

$$\begin{aligned}
 k_{n-1} &= b_n(t_0) \cdot y_1 \\
 k_{n-2} &= b_n(t_0) [y_2 - (-1)^{n-1} \cdot k_{n-1} \cdot a_{1n-1}] \\
 &\dots \\
 k_0 &= b_n(t_0) [y_n - (-1)^{n-1} \cdot k_{n-1} \cdot a_{n-1n-1} - \dots - (-1)^0 \cdot k_1 \cdot a_{n-11}] .
 \end{aligned} \tag{I,67}$$

Die speziellen Anfangsbedingungen $y_v = 0$ für $v = 1 \dots m$, aber $y_{m+1} \neq 0$ führen zu der Lösung $k_{n-1} = \dots = k_{n-m} = 0, k_{n-m-1} = b_n(t_0) y_{m+1}$.

Speziell $m = n-1; y_n = 1$ liefert bei $b_n(t) = 1$ die Lösung $k_{n-1} = \dots = k_1 = 0, k_0 = 1$. Dies ist der Fall, für den die Impulsantwort $h_0(t, \tau)$ berechnet wurde.

Ist die Lösung des Gleichungssystems (I,66) bekannt, so erhält man schließlich die gesuchte Lösung der Differentialgleichung

$$y(t) = k_0 \bar{h}_0(t, t_0) - k_1 \frac{\partial}{\partial \tau} [\bar{h}_0(t, \tau)] + \dots + (-1)^{n-1} k_{n-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau^{n-1}} [\bar{h}_0(t, \tau)]$$

$\tau = t_0$ für $t \geq t_0$ $\tau = t_0$

(I,68)

I.4.3.2 Ein einfaches Beispiel. Gesucht wird die Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung im Bereich $t \geq 0$

$$(2t+1)y'' + (4t-2)y' - 8y = 0 \text{ mit } y(0)=1, y'(0)=1 . \tag{I,69}$$

Im interessierenden Bereich erfüllen alle Koeffizientenfunktionen die für das Verfahren notwendigen Voraussetzungen.

Mit Hilfe der Gleichung (I,54) findet man schrittweise:

$$c_0(\tau) = 0, c_1(\tau) = \frac{1}{2\tau+1}, c_2(\tau) = \frac{2-4\tau}{(2\tau+1)^2}, \tag{I,70a}$$

$$c_3(\tau) = \frac{4\tau(4\tau-2)}{(2\tau+1)^3} + \frac{4}{(2\tau+1)^2}, c_4(\tau) = \frac{4\tau(4-16\tau^2)}{(2\tau+1)^4} - \frac{4(4\tau+2)}{(2\tau+1)^3}, \dots$$

Man erhält:

$$\bar{h}_0(t, \tau) = c_1(\tau) (t-\tau) + c_2(\tau) \frac{(t-\tau)^2}{2!} + \dots \quad (I, 70b)$$

Zur Berechnung von k_0 und k_1 wird ermittelt

$$a_{11} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} [\bar{h}_0(t, \tau)]_{t=\tau=0} = (-1)^1 \sum_{v=0}^2 (-1)^v \binom{1}{2-v} c_v^{(2-v)}(\tau) .$$

Entsprechend Gleichung (I, 67) wird $k_1 = b_2(0) = 1$,

$$k_0 = b_2(0) y_2 + b_2(0) k_1 a_{11} = -3 .$$

Aus den Gleichungen (I, 70a; I, 70b) erhält man für $\tau=0$

$$\bar{h}_0(t, 0) = t + t^2 + \frac{2}{3} t^3 + \dots ; \bar{h}'_{0\tau}(t, 0) = -1 - 4t - 8t^2 - \frac{8}{3} t^3 + \dots .$$

Die Gesamtlösung lautet dann nach Gleichung (I, 68) für $t \geq 0$:

$$y(t) = k_0 \cdot \bar{h}_0(t, 0) - k_1 \cdot \bar{h}'_{0\tau}(t, 0) = 1 + t + 5t^2 + \frac{2}{3} t^3 + \dots .$$

Entwickelt man die exakte Lösung der Differentialgleichung (I, 69) [18]

$$y(t) = -\frac{1}{2} e^{-2t} + 6t + \frac{2}{3}$$

bei $t=0$ in eine Taylorreihe, so findet man Übereinstimmung bei den berechneten Reihengliedern.

I.4.3.3 Die Anfangswerte der Impulsantwort $h(t, \tau)$. Zur Bestimmung der Ableitungswerte der Impulsantwort

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p} [h(t, \tau)]_{t=\tau=0}, \quad p=0, \dots, n-1$$

leitet man den Ausdruck

$$\bar{h}(t, \tau) = \sum_{v=0}^m (-1)^v \frac{\partial^v}{\partial \tau^v} [\bar{h}_0(t, \tau) a_v(\tau)]$$

ρ -mal nach t ab ($\rho=0, \dots, n-1$). Man erhält dann:

$$\bar{h}_t^{(\rho)}(t, \tau) = \sum_{v=0}^m \sum_{k=0}^v (-1)^v \binom{v}{k} a_v^{(v-k)}(\tau) \frac{\partial^{\rho+k}}{\partial t^{\rho} \partial \tau^k} [\bar{h}_0(t, \tau)] . \quad (I, 71)$$

Für $t=\tau=0$ erhält man, auch im Falle $m=n$, die gesuchten Ableitungswerte. Beachtet man zusätzlich die Ergebnisse nach Gleichung (I, 64), so wird schließlich:

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p} [h(t, \tau)]_{t=\tau=0} = \sum_{v=0}^m \sum_{k=n-1-\rho}^v (-1)^v \binom{v}{k} a_v^{(v-k)}(\tau) \bar{h}_{0t\tau}^{(\rho+k)}(t, \tau) \Big|_{t=\tau} \quad (I, 72)$$

Zur Bestimmung der Ableitungswerte von $\bar{h}_0(t, \tau)$ bei $t=\tau$ läßt sich die Gleichung (I, 63) verwenden.

Aus der Gleichung (I, 72) erkennt man, daß stets die ersten $n-m-2$ Ableitungen von $h(t, \tau)$ bei $t=\tau=0$ verschwinden.

I.4.4 Eine Erweiterung des Verfahrens zur Berechnung der Impulsantwort

I.4.4.1 Die Beschreibung des Verfahrens. Zur praktischen Berechnung von $h_0(t, \tau)$ nach der im Abschnitt I.4.2 beschriebenen Methode wird man stets nur endlich viele Reihenglieder berechnen können. Die sich ergebende endliche Reihe wird $h_0(t, \tau)$ bzw. $\bar{h}_0(t, \tau)$ mehr oder weniger gut approximieren. Eine gute Approximation ist sicher für genügend kleine Werte $(t - \tau)$ erreichbar, die Genauigkeit wird mit zunehmenden Werten $(t - \tau)$ geringer werden. Ein Ausweg aus dieser Schwierigkeit ergibt sich folgendermaßen.

$$Z_0(t, \tau) = \sum_{v=0}^N c_v(\tau) \frac{(t-\tau)^v}{v!} \quad (I, 73)$$

soll $\bar{h}_0(t, \tau)$ in $(t - \tau) \leq (t_1 - \tau)$ genügend gut approximieren. Ebenso sollen die ersten $(n-1)$ Ableitungen von $Z_0(t, \tau)$ nach t

$$Z_{0t}^{(\mu)}(t, \tau) = \sum_{v=\mu}^N c_v(\tau) \frac{(t-\tau)^{v-\mu}}{(v-\mu)!}, \mu=1, \dots, n-1$$

die entsprechenden Ableitungen von $\bar{h}_0(t, \tau)$ nach t genügend genau in $(t - \tau) \leq (t_1 - \tau)$ approximieren.

Liegen die Werte von $\bar{h}_{0t}^{(\mu)}(t_1, \tau), \mu=0 \dots n-1$ vor, so liefert die schrittweise Anwendung von Gleichung (I, 53) alle höheren Ableitungen. An der Stelle $t=t_1$ läßt sich jetzt, entsprechend Gleichung (I, 55a), eine Reihe

$$\bar{h}_0(t, \tau) = \bar{h}_0(t_1, \tau) + \bar{h}_0'(t_1, \tau)(t - t_1) + \bar{h}_0''(t_1, \tau) \frac{(t - t_1)^2}{2!} + \dots$$

$$\text{für } t \geq \tau, t_1 \geq \tau \quad (I, 74)$$

aufstellen.

Auf diese Weise erreicht man, daß, ohne Berechnung weiterer Glieder der Reihe (I, 73), $\bar{h}_0(t, \tau)$ auch bei $t > t_1$ genügend genau berechnet werden kann. Nachteilig ist, daß bei $t=t_1$ neue Reihen aufgestellt werden müssen. Es zeigt sich aber bei der praktischen Anwendung, daß es wesentlich einfacher ist, die Glieder für die neuen Reihen zu bestimmen, als eine entsprechende Erweiterung der Reihe (I, 73) vorzunehmen. Das Verfahren läßt sich fortsetzen, wenn aus der Gleichung (I, 74) $\bar{h}_0(t, \tau)$ und deren erste $n-1$ Ableitungen nach t an der Stelle $t=t_2 > t_1$ berechnet werden. Bei $t=t_2$ wird dann in der gleichen Weise eine Reihe für $\bar{h}_0(t, \tau)$ entwickelt.

1.4.4.2 Die mathematische Darstellung. Wird angenommen, daß bei $t=t_0$ die Werte von

$$\frac{\partial^v}{\partial t^v} [\bar{h}_0(t, \tau)]_{t=t_0}, v=0, \dots, n-1$$

bekannt sind, so erlaubt die Anwendung von Gleichung (I,53) die schrittweise Bestimmung aller höheren Ableitungen.

Setzt man insbesondere

$$\frac{\partial^v}{\partial t^v} [\bar{h}_0(t, \tau)]_{t=t_0} = 0; \quad \frac{\partial^\rho}{\partial t^\rho} [\bar{h}_0(t, \tau)]_{t=t_0} = 0; \quad \begin{matrix} \rho=0, \dots, v-1, v+1, \dots, n-1 \\ v=0, \dots, n-1 \end{matrix}, \quad (I,75)$$

so haben die gesuchten höheren Ableitungen jeweils die Form:

$$\bar{h}_0^{(n+\mu)}(t_0, \tau) = \frac{\partial^v}{\partial t^v} [\bar{h}_0(t, \tau)]_{t=t_0} \cdot A_{v\mu}(t_0), \mu=0, 1, \dots; v=0, \dots, n-1. \quad (I,76)$$

Speziell für $v=n-1$ und $A_{n-1,-1} = 1$ wird

$$A_{n-1,\mu}(t_0) = \frac{-1}{b_n(t_0)} \sum_{v=1}^{\mu+n} A_{n-1,\mu-v}(t_0) \left[\binom{\mu}{v} b_n^{(v)}(t_0) + \dots + \binom{\mu}{v-n} b_n^{(v-n)}(t_0) \right]. \quad (I,77)$$

Die Richtigkeit dieser Beziehung überlegt man sich leicht. Mit

$$A_{n-1,\mu}(t_0) = \bar{h}_0^{(n+\mu)}(t_0, \tau), \mu=0, 1, \dots \text{ und } \bar{h}_0^{(n-1)}(t_0, \tau) = 1,$$

ist die Gleichung (I,77) mit der Gleichung (I,53) identisch, wenn dort $\bar{h}_0^{(v)}(t_0, \tau) = 0$ für $v=0, \dots, n-2$ und $\bar{h}_0^{(n-1)}(t_0, \tau) = 1$ ist. Da aber jeder Summand von Gleichung (I,53) $\bar{h}_0^{(n-1)}(t_0, \tau)$ genau einmal als Faktor enthält und dieser den Wert 1 annimmt, ergibt sich für die Ableitungen $\bar{h}_0^{(n+\mu)}(t_0, \tau), \mu=0, 1, \dots$ eine Form entsprechend Gleichung (I,76).

Allgemein erhält man:

$$A_{\rho\mu}(t_0) = \frac{-1}{b_n(t_0)} \sum_{v=1}^{\mu+n} A_{\rho,\mu-v}(t_0) \left[\binom{\mu}{v} b_n^{(v)}(t_0) + \dots + \binom{\mu}{v-n} b_n^{(v-n)}(t_0) \right],$$

$$A_{\rho,\rho-n}(t_0) = 1, A_{\rho\mu}(t_0) = 0 \text{ für } \mu \neq \rho-n, \mu < 0 \text{ und } \rho=0, \dots, n-1. \quad (I,78)$$

Werden die Taylorreihen

$$R_v(t, t_0) = \sum_{\mu=-n}^{\infty} A_{v\mu}(t_0) \frac{(t-t_0)^{n+\mu}}{(n+\mu)!} \text{ für } v=0, \dots, n-1 \quad (I,79)$$

gebildet, so stellen diese gerade n linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung

$$L(p, t)y(t) = 0$$

für $t \geq t_0$ dar.

Die allgemeine Lösung $y(t)$ und die ersten $n-1$ Ableitungen von $y(t)$ lauten:

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t_0)R_0(t, t_0) + \dots + y^{(n-1)}(t_0)R_{n-1}(t, t_0) \\ y'(t) &= y(t_0)R'_0(t, t_0) + \dots + y^{(n-1)}(t_0)R'_{n-1}(t, t_0) \end{aligned} \quad (I, 80)$$

$$y^{(n-1)}(t) = y(t_0)R_0^{(n-1)}(t, t_0) + \dots + y^{(n-1)}(t_0)R_{n-1}^{(n-1)}(t, t_0)$$

oder

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0(t, t_0) & \dots & R_{n-1}(t, t_0) \\ R'_0(t, t_0) & \dots & R'_{n-1}(t, t_0) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ R_0^{(n-1)}(t, t_0) & \dots & R_{n-1}^{(n-1)}(t, t_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix},$$

kurz

$$y(t) = \underline{R}(t, t_0)y(t_0). \quad (I, 81)$$

Soll die Impulsantwort $\bar{h}_0(t, \tau)$ berechnet werden, so setzt man $t_0 = \tau$. Der Anfangsvektor $y(t_0)$ lautet jetzt:

$$\begin{bmatrix} y(t_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{h}_0(\tau, \tau) \\ \vdots \\ \bar{h}_0^{(n-1)}(\tau, \tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{h}_0(\tau, \tau) = \underline{e}_0. \quad (I, 82)$$

Man erhält somit in Matrizenform

$$\bar{h}_0(t, \tau) = \underline{R}(t, \tau)\underline{e}_0. \quad (I, 83)$$

Setzt man in der Gleichung (I, 83) $t = t_1$, so wird

$$\bar{h}_0(t_1, \tau) = \underline{R}(t_1, \tau)\underline{e}_0,$$

man kann den Vektor $\bar{h}_0(t_1, \tau)$ als Anfangsvektor für die Gleichung (I, 81) auffassen, so daß sich

$$\bar{h}_0(t, \tau) = \underline{R}(t, t_1)\underline{R}(t_1, \tau)\underline{e}_0 \quad (I, 84)$$

für $t \geq t_1$ ergibt.

Die Fortsetzung des Verfahrens liefert mit $t_z > t_{z-1} > \dots > t_2 > t_1$:

$$\bar{h}_0(t, \tau) = \underline{R}(t, t_z)\underline{R}(t_z, t_{z-1}) \dots \underline{R}(t_2, t_1)\underline{R}(t_1, \tau)\underline{e}_0, \quad (I, 85)$$

wenn $t \geq t_z$ ist.

Bei der Berechnung von $\bar{h}_0(t, \tau)$ für einen bestimmten Wert t wird man folgendermaßen vorgehen. Von den n Reihen $R_v(t, t_0)$ werden nach Gleichung (I, 79) jeweils N Glieder berechnet.

Dann wird nachgeschaut, wie groß $t = t_1 > \tau, (\tau = t_0)$ werden darf, so

daß die entstehenden Fehler der Elemente von $\underline{R}(t_1, \tau)$ hinreichend klein bleiben. Ist $t_1 > t$, so läßt sich die Gleichung (I,85) mit $z=1$ anwenden. In anderen Fällen berechnet man $\underline{R}(t_2, t_1)$ und wählt dabei $t_2 > t_1$ so groß, daß die geforderte Genauigkeit noch eingehalten wird. Ist $t_2 > t$, so wählt man in Gleichung (I,85) $z=2$, falls nicht, wird das Verfahren fortgesetzt.

Noch eine Bemerkung zur Bestimmung der Matrix $\underline{R}(t, t_0)$. Zu ihrer Berechnung müssen die n Reihen nach Gleichung (I,79) gebildet werden. Es zeigt sich jedoch, daß die Bestimmung der Reihe $R_{n-1}(t, t_0)$ ausreicht. $R_{n-1}(t, \tau)s(t-\tau)$ ist, wie man sofort erkennt, die Impulsantwort $h_0(t, \tau)$ des Systems $L(p, t)y(t)=x(t)$. Im Abschnitt I.4.3.1 wurde gezeigt, daß aus $h_0(t, \tau)$ Lösungen der homogenen Differentialgleichung $L(p, t)y(t)=0$ mit beliebigen Anfangsbedingungen gewonnen werden können. Zu diesem Zweck werden nach Gleichung (I,67) die Konstanten $k_0, \dots, k_{n-1}$ berechnet und nach Gleichung (I,68) die entsprechenden Lösungen $R_v(t, \tau)$, ($v=0, \dots, n-1$) ermittelt.

Zur Bestimmung von $R_0(t, \tau)$ beispielsweise, setzt man in die Gleichung (I,67) $y_1=1, y_2=y_3=\dots=y_n=0$ ein.

Ein Hinweis auf die Ermittlung von $h(t, \tau)$ aus $h_0(t, \tau)$. Neben der Möglichkeit $h(t, \tau)$ durch Differentiation entsprechend Gleichung (I,50) zu bestimmen, bietet sich auch noch folgende Möglichkeit an.

Ändert man den Anfangsvektor $\underline{e}_0$ in der Gleichung (I,85), so erhält man eine Lösung der homogenen Differentialgleichung $L(p, t)y(t)=x(t)$ mit anderen Anfangsbedingungen. Ersetzt man $\underline{e}_0$ durch den Vektor

$$\underline{e}(\tau) = \begin{bmatrix} h(t, \tau) \\ h'(t, \tau) \\ \vdots \\ h^{(n-1)}(t, \tau) \end{bmatrix}_{t=\tau+0} = \underline{\bar{h}}(\tau, \tau) \quad (\text{I,86})$$

und bildet das Produkt

$$\underline{\bar{h}}(t, \tau) = \underline{R}(t, t_z) \underline{R}(t_z, t_{z-1}) \dots \underline{R}(t_2, t_1) \underline{R}(t_1, \tau) \underline{e}(\tau), \quad (\text{I,87a})$$

so gilt

$$\underline{h}(t, \tau) = \underline{\bar{h}}(t, \tau) \text{ f. } t > \tau. \quad (\text{I,87b})$$

Ist $m < n$, so gilt sogar

$$\underline{h}(t, \tau) = \underline{s}(t-\tau) \underline{\bar{h}}(t, \tau).$$

$\mathbf{g}(t-\tau)$ ist eine $n \times n$ Einheitsmatrix, deren Elemente mit der Sprungfunktion $s(t-\tau)$ multipliziert wurden.

Im Falle $m=n$ ist zu dem früheren Ergebnis ein Vektor

$$\mathbf{e}_\delta = \begin{bmatrix} a(\tau)\delta(t-\tau) \\ a'(\tau)\delta(t-\tau) \\ \vdots \\ a_n^{(n-1)}(\tau)\delta(t-\tau) \end{bmatrix}$$

zu addieren.

I.4.5 Die Berechnung der Reihenglieder von $h_0(t, \tau)$ mit Hilfe eines Digitalrechners

Die numerische Bestimmung der Reihenglieder $A_{\nu\mu}(t_0)$, ($\nu=0 \dots n-1$; $\mu=0, 1, \dots$) zur Berechnung von $R_\nu(t, t_0)$ nach der Gleichung (I,79) ist auf dem Digitalrechner ohne Schwierigkeiten möglich. Auf Schwierigkeiten hingegen stößt man, wenn formelmäßige Ausdrücke für $A_{\nu\mu}(t_0)$ gewünscht werden. Solche formelmäßigen Ausdrücke sind beispielsweise zur Analyse stochastisch zeitvarianter Systeme wichtig.

Prinzipiell lassen sich diese Gleichungen zwar leicht anschreiben, doch werden die abgeleiteten Beziehungen schnell außerordentlich umfangreich.

Ein Beispiel soll dies deutlich machen. Gegeben ein System, das durch die Differentialgleichung

$$y'(t) + b(t)y(t) = x(t) \quad (\text{I,88})$$

beschrieben wird. Gesucht werden formelmäßige Ausdrücke für $A_{0\mu}(\tau)$, ($\mu=0, 1, \dots$). Die Matrix $\mathbf{R}(t, t_0)$ besteht hier nur aus einem einzigen Element.

Nach Gleichung (I,78) wird

$$A_{0\mu}(\tau) = - \sum_{\nu=1}^{\mu+1} A_{0,\mu-\nu}(\tau) \left(\frac{\mu}{\nu-1} \right) b^{(\nu-1)}(\tau); A_{0,0}(\tau) = 1. \quad (\text{I,89})$$

Durch schrittweise Berechnung erhält man:

$$A_{00}(\tau) = -b(\tau),$$

$$A_{01}(\tau) = [b^2(\tau) - b'(\tau)],$$

$$A_{02}(\tau) = -[b^3(\tau) - 3b(\tau)b'(\tau) + b''(\tau)]$$

$$A_{03}(\tau) = [b^4(\tau) - 6b^2(\tau)b'(\tau) + 4b(\tau)b''(\tau) + 3b'^2(\tau) - b'''(\tau)] \quad (I,90)$$

Für die Impulsantwort ergibt sich die Form

$$h(t, \tau) = h_0(t, \tau) = s(t - \tau) \left[1 - b(\tau)(t - \tau) + [b^2(\tau) - b'(\tau)] \frac{(t - \tau)^2}{2!} + \dots \right] \quad (I,91)$$

Aus Gleichung (I,90) erkennt man, daß die Ausdrücke $A_{0\mu}(\tau)$ für größere Werte μ recht lang werden. Besteht beispielsweise $A_{03}(\tau)$ aus 5 Summanden, so $A_{010}(\tau)$ aus 42 Summanden und $A_{020}(\tau)$ sogar aus 627 Summanden. Selbstverständlich ist die Aufstellung eines formelmäßigen Ausdruckes für z.B. $A_{020}(\tau)$ ohne Hilfe einer Rechenanlage sinnlos, da bei derart langen Ausdrücken Fehler nicht vermeidbar sind.

Am vorliegenden Beispiel soll nun gezeigt werden, wie ein Digitalrechner in diesem Fall als Hilfsmittel verwendet werden kann. Die beschriebene Methode ist ohne Schwierigkeiten erweiterbar für die Aufstellung von Reihengliedern bei Systemen mit Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Aus der Gleichung (I,89) erkennt man, daß die $A_{0\mu}(\tau)$, ($\mu=0,1,\dots$) stets Linearkombinationen von Produkten sind, deren Faktoren nur $b(\tau)$ oder Ableitungen von $b(\tau)$ sind.

Es sei

$$P_9 = b^2(\tau)b'^2(\tau)b''(\tau) \quad (I,92)$$

ein Beispiel für ein möglicherweise auftretendes Produkt. Diesem soll der Grad 9 nach folgenden Regeln zugeordnet werden.

1. Tritt in einem Produkt $b^{(v)}(\tau)$, ($v=0,1,\dots$) als Faktor auf, so soll dieser Faktor den Grad $v+1$ besitzen.
2. Der Grad eines Produktes berechnet sich als Summe der Grade seiner Faktoren.
3. Die Linearkombination von Produkten gleichen Grades hat den Grad der einzelnen Produkte.
4. Die Schreibweise $G(P)=z$ bedeutet, daß das Produkt P den Grad z hat. So hat also $b(\tau)$ den Grad 1, $b'(\tau)$ den Grad 2 usw. .

Nach den genannten Regeln prüft man leicht nach, daß unser Produkt nach Gleichung (I,92) den Grad 9 besitzt.

Man erkennt leicht die Gültigkeit der Beziehung:

$$G[A_{0\mu}(\tau)] = \mu + 1, \mu = 0, 1, \dots \quad (I,93)$$

Die Richtigkeit dieser Beziehung erkennt man folgendermaßen. Für $\mu=1,2,\dots,v$ gelte $G[A_{O\mu-1}(\tau)]=\mu$. Diese Beziehung ist z.B. für $v=4$ aus Gleichung (I,90) leicht zu kontrollieren. Zu beweisen ist, daß dann auch die Beziehung $G[A_{Ov}(\tau)]=\mu+1$ stimmt.

Nun berechnet sich $A_{O\mu}(\tau)$ nach Gleichung (I,89) als gewichtete Summe von $A_{O\mu-v}(\tau)b^{(v-1)}(\tau)$, $v=1,\dots,\mu+1$. Nach den vorne aufgestellten Regeln wird

$$G[(A_{O\mu-v}(\tau)b^{(v-1)}(\tau))] = (\mu-v+1)+v = \mu+1.$$

Bei der Bestimmung der $A_{O\mu}(\tau)$, $\mu=0,1,\dots$ zeigt es sich, daß die Zahl der unterschiedlichen Summanden in $A_{O\mu}(\tau)$ stets so groß ist, wie dies die Gleichung (I,93) maximal zuläßt.

Die formelmäßige Bestimmung der Reihenglieder wird man wie folgt vornehmen. Zur Kennzeichnung der Summanden von $A_{O\mu}(\tau)$ wählt man eine Kennziffer von beispielsweise 10 Stellen. Die 1. Stelle von links gibt an, in welcher Potenz $b(\tau)$ auftritt, die 2. Stelle gibt die Potenz von $b'(\tau)$ usw. an.

Die Kennziffer für das in Gleichung (I,92) dargestellte Produkt würde lauten: 2210000000.

Zur Kennzeichnung der $A_{O\mu}(\tau)$, $\mu=0,1,\dots$ sind zusätzlich noch Faktoren nötig mit denen die Produkte jeweils multipliziert werden. Die Kennzeichnung der in Gleichung (I,90) angegebenen $A_{O\mu}(\tau)$ erfolgt demnach durch folgende Zahlen:

	Kennziffer	Faktor
$A_{O0}(\tau)$:	1000000000	-1
$A_{O1}(\tau)$:	2000000000	+1
	1000000000	-1
$A_{O2}(\tau)$:	3000000000	-1
	1100000000	-3
	100000000	+1
$A_{O3}(\tau)$:	4000000000	+1
	2100000000	-6
	1010000000	+4
	200000000	+3
	1000000	-1

Kennziffern und Faktoren für die $A_{O\mu}(\tau)$, $\mu=0,1,\dots$ lassen sich

nun ohne Schwierigkeiten auf dem Digitalrechner berechnen. Für die Differentialgleichung (I,88) wurde die Ermittlung der Kennziffern und Faktoren bis zu $A_{0,21}(\tau)$ vorgenommen. Die Kennziffern und die Faktoren wurden auf Lochkarten ausgedruckt und stehen so als Eingangsdaten für Auswertungsprogramme zur Verfügung (vgl. Abschnitt II.5.3.2).

Sind die Kennziffern von $A_{0,\mu}(\tau)$ bekannt, so lassen sich aus diesen leicht die Kennziffern von $A_{0,\nu}(\tau)$ für $\nu < \mu$ berechnen. Aus den Kennziffern von $A_{0,\mu}(\tau)$ erhält man nämlich die von $A_{0,\mu-1}(\tau)$, wenn die 1. Stelle der Kennziffern um 1 vermindert wird. Die Kennziffern von $A_{0,\mu-1}(\tau)$ sind dann die, bei denen die Subtraktion positive Zahlen liefert.

Eine weitere Bemerkung zu den Kennziffern. Für $\mu \geq 9$ bei der Bestimmung von $A_{0,\mu}(\tau)$, ist zur Bezeichnung der Potenz von $b(\tau)$ mehr als eine Stelle nötig. Im erwähnten Programm wurden daher als Kennziffern jeweils 30 stellige Zahlen verwendet.

I.4.6 Der Sonderfall periodisch zeitvarianter Systeme

I.4.6.1 Die Impulsantwort und die Stabilität. Die Koeffizientenfunktionen $b_\nu(t)$, $\nu=0, \dots, n-1$ und $a_\mu(t)$, $\mu=0, \dots, m$ sollen die im Abschnitt I.4.1 angegebenen Voraussetzungen erfüllen. Weiterhin sollen diese Koeffizientenfunktionen periodische Funktionen mit der gemeinsamen primitiven Periode T sein.

In diesem Fall sind die im Abschnitt I.4.4 angegebenen Gleichungen zur Berechnung von $h(t, \tau)$ bzw. $h_0(t, \tau)$ anwendbar.

Aus der Gleichung (I,78) erkennt man, daß die Periodizität der $b_\nu(t)$ die Eigenschaft

$$A_{\rho,\mu}(t_0) = A_{\rho,\mu}(T+t_0), \quad \rho=0, \dots, n-1; \quad \mu=0, 1, \dots \quad (I,95)$$

zur Folge hat.

Dies bedingt weiterhin die Gültigkeit der Beziehung:

$$R_\nu(t_0 + (\nu+1)T, t_0 + \mu T) = R_\nu(t_0 + T, t_0), \quad \nu=0, \dots, n-1; \quad \mu=0, 1, \dots \quad (I,96)$$

Wendet man nun Gleichung (I,85) zur Bestimmung der Impulsantwort $h(t, \tau)$ an, so erhält man

$$\bar{h}(t, \tau) = \underline{R}(t, \tau + nT) [\underline{R}(T + \tau, \tau)]^{n-1} \underline{e}(\tau), \quad (I,97)$$

wenn $nT \leq (t - \tau) \leq (n+1)T$ gilt, und die Zeitspanne nT gerade in

n gleiche Teile unterteilt wird. Die Berechnung der Impulsantwort wird auf diese Weise besonders einfach.

Es wird darauf hingewiesen, daß keinesfalls so viele Reihenglieder zu bestimmen sind, daß $\underline{R}(T+\tau, \tau)$ genügend genau berechnet werden kann. Die Zeit T läßt sich vielmehr wieder in a Teile unterteilen, so daß

$$\underline{R}(T+\tau, \tau) = \underline{R}(T+\tau, t_a) \underline{R}(t_a, t_{a-1}) \dots \underline{R}(t_1, \tau)$$

gilt. Die Differenzen $T+\tau-t_a, t_a-t_{a-1}$, usw. werden so klein gewählt, daß bei gegebener Gliederzahl der Reihen genügend genaue Werte der Matrizenelemente berechnet werden können.

Die Darstellung nach Gleichung (I,97) ist für die Stabilitätskontrolle von besonderer Bedeutung.

Die Bedingung $\underline{h}(t, \tau) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ bei festem τ ist nämlich bei periodisch zeitvarianten Systemen, ebenfalls bei konstanten, identisch mit der Stabilitätsdefinition, wie sie dieser Arbeit zugrunde liegt [6], [22]. Notwendige und hinreichende Bedingung für die Stabilität eines periodisch zeitvarianten Systems ist somit die, daß alle Eigenwerte der Matrix $\underline{R}(T+\tau, \tau)$ dem Betrag nach kleiner 1 sein müssen [22].

Die Eigenwerte der Matrix brauchen sogar nur für einen beliebigen Wert von τ , etwa $\tau=0$ berechnet werden.

I.4.6.2 Einfache Beispiele. Wir betrachten das System mit der Differentialgleichung [13]

$$y''(t) + \frac{1}{4} y'(t) + \frac{1}{4} (1 + \alpha \cos \omega_0 t) y(t) = \frac{1}{4} x(t)$$

und stellen fest, daß ein periodisch zeitvariantes System mit der Periode $T=2\pi/\omega_0$ vorliegt. Man erkennt weiterhin sofort, daß die Impulsantwort dieses Systems als Taylorreihe dargestellt werden kann.

Im Bild 4 ist die Impulsantwort für $\tau=0$ und zwei Beispiele

$$a) \alpha = 2,8; \omega_0 = 1,6; T_a = 3,927,$$

$$b) \alpha = 1; \omega_0 = 1; T_b = 6,283$$

dargestellt. Zur Berechnung standen Kennziffern und Faktoren für 13 Reihenglieder bei einer Differentialgleichung 2. Ordnung zur Verfügung. Die aus 4 Elementen bestehende Matrix $\underline{R}(t, t_0)$ wurde jeweils für Werte $t_0 = v \cdot 0,6$, $v=0, \dots, 9$ aufgestellt und die gesuchte Matrix $\underline{R}(T, 0)$ nach Gleichung (I,85) berechnet.

Es sei erwähnt, daß nur die Reihendarstellung für das Element $R_1(t, t_0)$ bekannt war. Die Reihendarstellung für $R_0(t, t_0)$ wurde nach dem im Abschnitt I.4.4.2 erwähnten und im Abschnitt I.4.3 beschriebenen Verfahren ermittelt.

Die berechneten Matrizen $\underline{R}(T, 0)$ lauten

$$\underline{R}_a(T, 0) = \begin{bmatrix} -0,0033815 & 0,53639 \\ -0,0382965 & -0,20473 \end{bmatrix} \quad \text{für das Beispiel a,}$$

$$\underline{R}_b(T, 0) = \begin{bmatrix} -0,1209365 & 0,19782 \\ 0,0416243 & -0,17469 \end{bmatrix} \quad \text{für das Beispiel b .}$$

Eine Kontrollrechnung nach dem Runge-Kutta Verfahren führte zu gleichen Ergebnissen.

Man prüft leicht nach, daß die Eigenwerte beider Matrizen dem Betrag nach kleiner als 1 sind, es handelt sich somit bei beiden Beispielen um stabile Systeme.

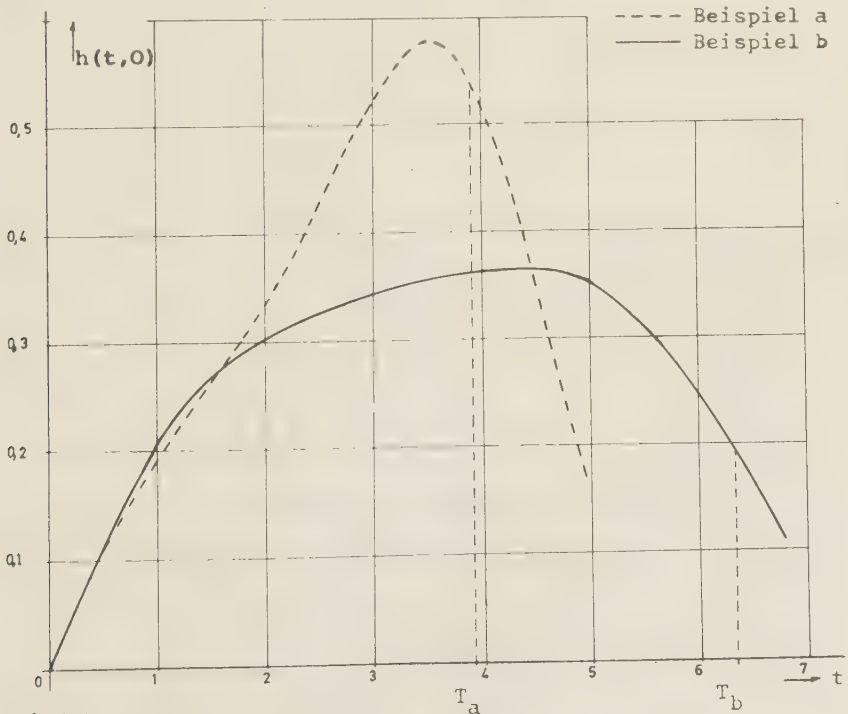


Bild 4

II STATISTISCH ZEITVARIANTE SYSTEME

II.1. Vorbemerkungen

Die Abschnitte 3 und 4 des ersten Teiles dieser Arbeit beschäftigten sich mit der Analyse von Systemen, die durch lineare Differentialgleichungen beschrieben werden. Die in den Differentialgleichungen auftretenden Koeffizienten $b_v(t), a_\mu(t)$, ($v=0 \dots n, \mu=0 \dots m$) wurden dabei stets durch eindeutige Funktionen, allenfalls durch verallgemeinerte Funktionen, beschrieben.

Der 2. Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit linearen Systemen, die ebenfalls durch lineare Differentialgleichungen beschrieben werden, allerdings mit einem wesentlichen Unterschied. Die Koeffizienten $b_v(t), a_\mu(t)$, ($v=0 \dots n, \mu=0 \dots m$) sind im allgemeinen nicht mehr durch determinierte oder auch verallgemeinerte Funktionen beschreibbar, vielmehr sollen die Werte der Koeffizienten zufällig im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie sein. Die Beschreibung der Koeffizienten erfolgt daher mit den Hilfsmitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Es wird ein Verfahren angegeben, das bei geeigneten Voraussetzungen an die statistischen Eigenschaften der Koeffizienten erlaubt, wichtige Eigenschaften der Impulsantwort solcher Systeme herzuleiten.

Im folgenden Abschnitt 2 werden zunächst die wichtigsten Gesetze der Wahrscheinlichkeitstheorie zusammengestellt, die für die folgenden Untersuchungen wichtig sind.

II.2 Stochastische Prozesse

II.2.1 Wahrscheinlichkeit und Zufallsvariable

Gegeben sei eine Menge E von Elementen e , die Elementarereignisse genannt werden. F sei eine Menge von Teilmengen aus E . Die Elemente f von F nennt man zufällige Ereignisse.

Es gelten nach Kolmogoroff die folgenden Axiome zur Festlegung des Begriffes der Wahrscheinlichkeit (vgl. z.B. [5]).

1. F ist ein Mengenkörper, das bedingt, daß Summe, Durchschnitt und Differenz zweier Mengen aus F wieder zu F gehören. Insbesondere enthält F auch E und die Nullmenge O .
2. Jedem Element f aus F wird eine nichtnegative Zahl $P(f)$ zugeordnet. Diese Zahl wird die Wahrscheinlichkeit des zufälligen Ereignisses f genannt.
3. $P(E) = 1$.
4. Ist $f_1, f_2, \dots$ ein endliches oder abzählbar unendliches System disjunkter Mengen von F , und gehört auch

$$\sum_n f_n \text{ zu } F, \text{ so gilt } P\left(\sum_n f_n\right) = \sum_n P(f_n).$$

F heißt ein Borelscher Mengenkörper, wenn alle abzählbaren Summen disjunkter Mengen aus F auch zu F gehören. Eine eindeutig bestimmte kleinste Erweiterung von F zu einem Borel-Körper ist stets möglich und wird als durchgeführt betrachtet. F und die Funktion $P(f)$ nennt man Borelsches Wahrscheinlichkeitsfeld. Häufig ist es zweckmäßig von dem ursprünglich gegebenen Wahrscheinlichkeitsfeld zu einem anderen überzugehen.

Die Menge E wird dann eindeutig auf eine Menge E' abgebildet. Ein Ereignis $f' \in F'$ ist dem Ereignis $f \in F$ so zugeordnet, daß f aus denjenigen Elementen von E besteht, die nach f' abgebildet werden. Es wird $P(f) = P(f')$ gesetzt.

Der Übergang von dem ursprünglichen Borelkörper F auf den Borelkörper F' , der aus der Klasse aller Intervalle $[a, b)$, $b > a$ von R^1 besteht, führt auf die Definition der Zufallsvariablen (vgl. z.B. [7]).

Definition: Eine eindeutige (reelle) Funktion $x(e)$ auf E heißt Zufallsvariable, wenn das inverse Bild $x^{-1}(s)$ jeder Menge $s \in F'$ zur Menge E gehört, also $x^{-1}(s) \in E$ für alle $s \in F'$ gilt.

Auf entsprechende Art sind mehrdimensionale Zufallsvariable erklärt, wenn ein System von n Funktionen $x_1(f), \dots, x_n(f)$ auf E definiert wird. F' ist in diesem Fall die Menge aller Intervalle $\{[a_1, b_1), \dots, [a_n, b_n)\}$, $a_v < b_v$, $(v=1..n)$ in R^n .

Eine abschließende Bemerkung zur Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffes. Die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeit ist bekanntlich mathematisch nicht korrekt. Keinesfalls konvergiert nämlich die relative Häufigkeit gegen einen festen Wert, die Wahrscheinlichkeit.

Es gilt also nicht $|h_n - p| < \epsilon$ f. $n > n_0$, wenn h_n die relative Häufigkeit nach n Versuchen, p die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses ist. Vielmehr tritt sogenannte "Konvergenz in Wahrscheinlichkeit"

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|h_n - p| < \epsilon) = 1$$

auf. Diese Beziehung ist eine Aussage des Gesetzes der großen Zahlen.

II.2.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung und charakteristische Funktion

II.2.2.1 Definition eindimensionaler Verteilungsfunktionen

Unter der Verteilungsfunktion $F(x)$ der Zufallsvariablen φ versteht man die Wahrscheinlichkeit

$$F(x) = P(\varphi < x) \quad (II,1)$$

$F(x)$ ist also die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zufallsvariable einen Wert annimmt, der kleiner als eine reelle Zahl x ist.

Folgende einfache Eigenschaften von $F(x)$ sind unmittelbar einzusehen:

$$F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1, F(x+\epsilon) \geq F(x) \text{ für } \epsilon > 0.$$

Die Verteilungsfunktion ist somit monoton wachsend, linksseitig stetig und als Stieltjes-Integral

$$F(x) = \int_{-\infty}^x dF(u) \quad (II,2a)$$

darstellbar.

Ist $F(x)$ eine stückweise differenzierbare Funktion, so läßt sich $dF(u) = w(u)du$ schreiben, es wird

$$F(x) = \int_{-\infty}^x w(u) du. \quad (II,2b)$$

$w(u)$ heißt Wahrscheinlichkeitsdichte, es ist stets

$$w(u) \geq 0 \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} w(u) du = 1.$$

Existiert $w(u)$, so spricht man von einer stetigen, sonst von einer diskreten Verteilung.

II.2.2.2 Die Momente. Als Mittelwert oder Erwartungswert einer Funktion $g(x)$ bezeichnet man das Funktional

$$\overline{g(x)} = E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) . \quad (II,3)$$

$E[g(x)]$ existiert jedenfalls dann, wenn $g(x)$ von beschränkter Variation oder gleichmäßig beschränkt ist; $g(x)$ darf keine gemeinsamen Unstetigkeitsstellen mit $F(x)$ besitzen.

Existiert das Integral

$$|\overline{x^n}| = E[|x^n|] = \int_{-\infty}^{\infty} |x^n| dF(x) ,$$

so existiert auch

$$\overline{x^n} = E[x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF(x) . \quad (II,4)$$

$E[x^n]$ heißt n-tes Moment der Zufallsvariablen. Existiert $E[x^n]$, so existiert auch $E[x^v]$ für $v=0, \dots, n$, aber nicht notwendig für $v > n$.

Das 1. Moment

$$\overline{x} = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \quad (II,5)$$

heißt Mittelwert der Zufallsvariablen.

$$E[(x-\overline{x})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{x})^2 dF(x) = E[x^2] - [E[x]]^2 = \sigma^2 \quad (II,6)$$

wird quadratische Streuung der Zufallsvariablen genannt. σ^2 ist ein Maß für die mittlere Abweichung der Zufallsvariablen von ihrem Mittelwert. Ist $\sigma^2=0$, so stimmt x "fast sicher" mit dem festen Wert $E[x]$ überein.

II.2.2.3 Charakteristische Funktion. Den Erwartungswert

$$E[e^{i\omega x}] = C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dF(x) \quad (II,7)$$

nennt man charakteristische Funktion der Zufallsgröße. Es läßt sich zeigen, daß $F(x)$ und $C(\omega)$ umkehrbar eindeutig zugeordnet sind [5]. Stets gilt

$$F(x_1) - F(x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x_1} - e^{-i\omega x_2}}{i\omega} C(\omega) d\omega . \quad (II,8a)$$

Existiert eine Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x)$, so wird aus der Gleichung (II,8a)

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} C(\omega) d\omega . \quad (II,8b)$$

$C(-\omega)$ ist also in diesem Fall die Fouriertransformierte der Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x)$, dies ist stets der Fall, wenn $w(x)$ als verallgemeinerte Ableitung von $F(x)$ aufgefaßt wird. Die Einführung der charakteristischen Funktion gestattet die Anwendung der aus der Theorie der Fouriertransformation bekannt-

ten Ergebnisse. Sie führt bei vielen Aufgaben zu besonders einfachen Lösungen.

Einige wichtige Eigenschaften der charakteristischen Funktion sollen ohne Beweis angegeben werden [5]:

1. $C(0) = 1$; $|C(\omega)| \leq 1$ f. alle ω . (II,9a)
2. Falls $E[x^n]$ existiert, besitzt $C(\omega)$ mindestens n Ableitungen, es gilt

$$C^{(v)}(0) = i^v E[x^v] \text{ f. alle } v \leq n. \quad (\text{II},9b)$$

3. Satz von Bochner-Chintschin:

$C(\omega)$ ist genau dann charakteristische Funktion, wenn $C(0)=1$ ist, und $C(\omega)$ positiv definit ist. D.h., für beliebige Werte n gilt:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n C(\omega_k - \omega_j) z_k^* z_j \geq 0 \quad (\text{II},9c)$$

ω_1, ω_k sind beliebige reelle, z_1, z_k beliebige komplexe Zahlen. Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, in dem die Zufallsvariable x normalverteilt ist. Die Dichtefunktion hat dann die Form:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} \quad (\text{II},10a)$$

Die charakteristische Funktion erhält man zu

$$C(\omega) = e^{ia\omega} e^{-(\sigma^2\omega^2/2)}. \quad (\text{II},10b)$$

Wie man leicht feststellt, ist $a=E[x]$, $\sigma^2=E[x^2]-a^2$.

Die Verteilungsfunktion normalverteilter Zufallsvariablen ist demnach alleine durch ihren Mittelwert und ihre Streuung bestimmt.

II.2.2.4 Mehrdimensionale Verteilungen. $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ seien n zufällige Variable, dann ist

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\varphi_1 < x_1, \varphi_2 < x_2, \dots, \varphi_n < x_n)$$

die n -dimensionale Verteilungsfunktion dieser Variablen, sie hat folgende wichtige Eigenschaften:

1. Die Verteilungsfunktion ist in allen Variablen monoton ansteigend und nach links stetig.

$$2. \lim_{x_i \rightarrow -\infty} F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i=1 \dots n; F_n(+\infty, +\infty, \dots, +\infty) = 1.$$

$$3. F_n(b_1, b_2, \dots, b_n) - F_n(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 0 \text{ f. alle } b_i \geq a_i$$

4. Existiert eine Funktion $w_n(x_1, \dots, x_n)$ derart, daß

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} w_n(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n \quad (II, 11)$$

gilt, so spricht man von einer stetigen Verteilung. $w_n(x_1, \dots, x_n)$ heißt n-dimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte.

5. Ist $P(\varphi_1 < x_1, \dots, \varphi_n < x_n) = P(\varphi_1 < x_1) \cdot P(\varphi_2 < x_2) \dots P(\varphi_n < x_n)$, so sind die Zufallsvariablen φ_i ($i=1 \dots n$) voneinander unabhängig. Dann gilt

$$F_n(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \dots F_n(x_n)$$

bzw. im Falle der Existenz

$$w_n(x_1, \dots, x_n) = w_1(x_1) \cdot w_2(x_2) \dots w_n(x_n).$$

$F_i(x_i), w_i(x_i), i=1 \dots n$ sind die Verteilungs- bzw. Dichtefunktionen der Zufallsgrößen x_i .

II.2.2.5 Der Korrelationskoeffizient. Entsprechend der Definition des Erwartungswertes einer Funktion $g(x)$, ist der Erwartungswert der Funktion $g_n(x_1, \dots, x_n)$ definiert durch:

$$E[g_n(x_1, \dots, x_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x_1, \dots, x_n) dF_n(x_1, \dots, x_n). \quad (II, 12)$$

Unter dem Mittelwert der n-dimensionalen Zufallsgröße $x_1, \dots, x_n$ versteht man die Gesamtheit der folgenden n Ausdrücke:

$$E[x_j] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_j dF_n(x_1, \dots, x_n), i=1 \dots n. \quad (II, 13)$$

Die Existenz von $E[x_i]$ wird jeweils vorausgesetzt.

Die Streuung ist durch die n^2 Größen

$$E[(x_i - a_i)(x_j - a_j)] = b_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - a_i)(x_j - a_j) dF_n(x_1, \dots, x_n), \quad i, j=1 \dots n, \quad (II, 14a)$$

gegeben. Dabei ist $a_i = E[x_i]$, $a_j = E[x_j]$. Die Existenz der b_{ij} ($i, j=1 \dots n$) ist nicht immer gesichert, sie muß gegebenenfalls nachgeprüft werden. Man stellt weiterhin fest, daß die b_{ij} nicht voneinander unabhängig sind. Aus

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^n z_i (x_i - a_i) \right]^2 dF_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} z_i z_j b_{ij} \geq 0,$$

zeigt sich, daß für alle reellen z_1, z_2 die Bedingung

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_i z_j b_{ij} \geq 0 \quad (II, 14b)$$

erfüllt sein muß. Aus der Theorie der quadratischen Formen ist

bekannt [23], daß die Bedingung (II,14b) identisch ist mit der Bedingung

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ - & - & - & - \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kk} \end{vmatrix} \geq 0, k=1,2,\dots,n. \quad (\text{II},14c)$$

$b_{ij}, i \neq j$ nennt man gemischte Zentralmomente 2. Ordnung.

$$r_{ij} = \frac{b_{ij}}{\sqrt{b_{ii}b_{jj}}} \quad (\text{II},15a)$$

heißt Korrelationskoeffizient zwischen den Zufallsvariablen x_i und x_j . Aus der Gleichung

$$E \left\{ \left(\frac{x_i - a_i}{\sqrt{b_{ii}}} \pm \frac{x_j - a_j}{\sqrt{b_{jj}}} \right)^2 \right\} = 2(1 \pm r_{ij}) \geq 0,$$

erhält man die Ungleichung

$$-1 \leq r_{ij} \leq +1. \quad (\text{II},15b)$$

Man rechnet leicht aus, daß der Fall $|r|=1$ nur dann auftreten kann, wenn x_i und x_j linear voneinander abhängen. Sind x_i und x_j voneinander unabhängig, so wird $r_{ij}=0$. Die umgekehrte Folgerung ist falsch, aus $r_{ij}=0$ folgt nicht notwendig die Unabhängigkeit von x_i und x_j .

Sind σ_i^2 und σ_j^2 die quadratischen Streuungen von x_i und x_j , so ist

$$r_{ij} = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - a_i)(x_j - a_j) w_2(x_i, x_j) dx_i dx_j, \quad (\text{II},16)$$

wenn die Dichtefunktion $w_2(x_i, x_j)$ existiert.

Eine plausible Erklärung des Korrelationskoeffizienten erhält man folgendermaßen.

Wiederholte, voneinander unabhängige Versuche liefern als Ergebnis die Werte der Zufallsvariablen x_1, x_2 :

$$x_1: x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots$$

$$x_2: x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots$$

Wir setzen voraus, daß $a_1 = a_2 = 0$ ist und bilden die Summen

$$\tilde{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_{1v}^2; \tilde{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_{2v}^2; \tilde{r}_{12} = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_{1v} x_{2v}.$$

Nun konvergiert $\tilde{\sigma}_1^2 \rightarrow \sigma_1^2$ und $\tilde{\sigma}_2^2 \rightarrow \sigma_2^2$ in Wahrscheinlichkeit. Daher kon-

vergiert ebenso $\tilde{r}_{12} \rightarrow r_{12}$ und es gilt

$$r_{12} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_{1v} x_{2v} \quad (\text{II}, 17)$$

mit der Wahrscheinlichkeit 1.

In der Gleichung (II,17) lassen sich 3 Fälle unterscheiden.

1. Mit "großer Wahrscheinlichkeit" hat ein Wert $x_{1v} > 0$ einen Wert $x_{2v} > 0$, ($v=0 \dots n$) zur Folge. Dann wird die Summe positiv sein, man erhält einen Wert $r_{12} > 0$, der um so näher an 1 liegt, je stärker die "Kopplung" von x_1 zu x_2 ist.
2. $x_{1v} > 0$ zieht mit "hoher Wahrscheinlichkeit" $x_{2v} < 0$ nach sich. Es ergibt sich ein Wert $r_{12} < 0$, da "fast alle" Summanden in der Summe (II,17) negative Vorzeichen haben.
3. x_1 sei von x_2 unabhängig, die Vorzeichen der Summanden von (II,17) sind mit gleicher Wahrscheinlichkeit positiv und negativ, es wird $r_{12} = 0$ werden, falls nur n genügend groß wird.

II.2.2.6 Charakteristische Funktionen bei mehrdimensionalen Verteilungen. Den Erwartungswert

$$\begin{aligned} E \left[e^{i(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n)} \right] &= C_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n)} dF_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (\text{II}, 18)$$

nennt man charakteristische Funktion der n -dimensionalen Zufallsvariablen $(x_1, \dots, x_n)$.

Existiert die Dichte $w_n(x_1, \dots, x_n)$, so gilt auch:

$$w_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} C_n(\omega_1, \dots, \omega_n) e^{-i(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n)} dx_1 \dots dx_n \quad (\text{II}, 19)$$

Einige wichtige Eigenschaften:

1. $C_n(0, \dots, 0) = 1$;
 $|C_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)| \leq 1, (-\infty < \omega_v < \infty, v=1 \dots n).$ (II, 20a)
2. Existiert das gemischte Moment $E[x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}]$, so gilt

$$E[x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}] = i^{(k_1 + \dots + k_n)} \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial \omega_1^{k_1} \dots \partial \omega_n^{k_n}} [C(\omega_1, \dots, \omega_n)] \quad \omega_1 = \dots = \omega_n = 0 \quad (\text{II}, 20b)$$

3. Sind die Zufallsvariablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ jeweils voneinander unabhängig, so wird

$$C_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = C_1(\omega_1) \cdot C_2(\omega_2) \cdot \dots \cdot C_n(\omega_n), \quad (\text{II}, 20c)$$

wenn $C_v(\omega_v)$, ($v=1 \dots n$) die charakteristische Funktion der Zufallsvariablen x_v ist.

4. Ist $C_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$ die charakteristische Funktion der Variablen $x_1 \dots x_n$, so ist die charakteristische Funktion von

$$\bar{x}_1 = a_1 x_1 + b_1, \dots, \bar{x}_n = a_n x_n + b_n :$$

$$C_n(a_1 \omega_1, \dots, a_n \omega_n) e^{i(b_1 \omega_1 + \dots + b_n \omega_n)} \quad (\text{II}, 20d)$$

5. Aus der charakteristischen Funktion der Zufallsvariablen $x_1, \dots, x_n$ erhält man die charakteristische Funktion der Summe

$$k_1 x_1 + \dots + k_n x_n \text{ zu } C_n(k_1 \omega, \dots, k_n \omega). \quad (\text{II}, 20e)$$

II.2.2.7 Die n-dimensionale Normalverteilung. Die Normalverteilung spielt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine überaus wichtige Rolle. Daher sollen kurz die wichtigsten Eigenschaften angegeben werden. Für den eindimensionalen Fall wurde im Abschnitt II.2.3 Dichte und charakteristische Funktion angegeben. n Zufallsvariable sind genau dann normalverteilt, wenn ihre Dichtefunktion die Form

$$w_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sqrt{|D|}}{|\sqrt{2\pi}|^n} e^{-0,5 Q(x_1, \dots, x_n)} \quad (\text{II}, 21a)$$

hat. Darin ist

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} (x_i - a_i)(x_j - a_j) \quad (\text{II}, 21b)$$

eine positiv definite quadratische Form, es gilt also

$$\begin{vmatrix} d_{11} & \dots & d_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{k1} & \dots & d_{kk} \end{vmatrix} \geq 0 \text{ für } k=1, 2, \dots, n. \quad (\text{II}, 21b)$$

Durch Rechnung stellt man die Gültigkeit der folgenden Beziehungen fest.

$$a_i = E[x_i]; b_{ij} = \frac{D_{ij}}{|D|} = E[(x_i - a_i)(x_j - a_j)]; i, j=1, \dots, n \quad (\text{II}, 21c)$$

In der Gleichung (II,21c) ist

$$|D| = \begin{vmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix}$$

die Determinante der Matrix $\underline{D}$ mit den Elementen $d_{ij}, (i,j=1\dots n)$.

D_{ij} ist die zum Element d_{ij} gehörende Unterdeterminante.

Aus der Gleichung (II,21c) liest man den Zusammenhang ab:

$$\underline{B} = \frac{1}{|D|} \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix},$$

oder

$$\underline{B} = \underline{D}^{-1} ; \underline{D} = \underline{B}^{-1}. \quad (\text{II},22)$$

Ist demnach die Streuungsmatrix $\underline{B}$ bekannt, so erhält man $\underline{D}$ durch Inversion. Durch die Streuungsmatrix $\underline{B}$ und den Mittelwertvektor $\underline{a}$ aus der n Elementen $a_i = E[x_i]$ ist demnach die Dichte der Normalverteilung eindeutig bestimmt.

Eine einfache Schreibweise für die Dichte erhält man folgendermaßen. Es sei $\bar{\underline{x}} = \underline{x} - \underline{a}$ der Vektor der Elemente $x_i - E[x_i], i=1\dots n$, $\underline{B}$ wieder die Streuungsmatrix. Dann gilt nach der Theorie der quadratischen Formen unter Beachtung von Gleichung (II,22) [23]:

$$Q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \bar{\underline{x}}' \underline{B}^{-1} \bar{\underline{x}},$$

und somit

$$w_n(\bar{\underline{x}}') = \frac{\sqrt{|\underline{B}^{-1}|}}{\sqrt{2\pi}} n e^{-0,5 \bar{\underline{x}}' \underline{B}^{-1} \bar{\underline{x}}} \quad (\text{II},23)$$

Die charakteristische Funktion normalverteilter Zufallsvariabler lautet:

$$C_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = e^{i(a_1 \omega_1 + \dots + a_n \omega_n)} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \omega_i \omega_j}. \quad (\text{II},24a)$$

In kürzerer Schreibweise:

$$C_n(\underline{\omega}') = e^{i \underline{a}' \underline{\omega}} e^{-0,5 \underline{\omega}' \underline{B} \underline{\omega}}, \quad (\text{II},24b)$$

wenn $\underline{\omega}$ der Vektor der Elemente ω_i ist.

Besteht Unabhängigkeit zwischen den einzelnen Variablen, so muß

nach Gleichung (II,20c) gelten :

$$C_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = \prod_{v=1}^n e^{i a_v \omega_v} e^{-0,5 \sigma_v^2 \omega_v^2} \quad (\text{II},25)$$

Man erkennt, daß die Form (II,25) nur erreicht wird, wenn

$b_{ij}=0$ für $i \neq j$, $\sigma_i^2 = b_{ii}$, ($i=1, \dots, n$) ist.

Die Matrix $\underline{D}$ hat dann die Form:

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1/\sigma_n^2 \end{bmatrix} .$$

Es gilt daher in diesem Fall:

$$w_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{v=1}^n \frac{e^{-(x_v - a_v)^2 / 2 \sigma_v^2}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_v} . \quad (\text{II},26)$$

Die Formen (II,25) bzw. (II,26) für charakteristische Funktion bzw. Dichte sagen aus, daß zwischen den Zufallsvariablen $x_1 \dots$

x_n , Unabhängigkeit besteht. Im Fall normalverteilter Prozesse bedeuten demnach verschwindende Korrelationskoeffizienten

$r_{ij}=0$ für $i \neq j$ auch Unabhängigkeit der Variablen.

Sind $x_1, x_2, \dots, x_n$ normalverteilt, so erhält man die charakteristische Funktion der neuen Variablen

$z = k_1 x_1 + \dots + k_n x_n$, (alle k_v reell und endlich)

mittels der Gleichungen (II,24a) und (II,20e) zu

$$C_z(\omega) = e^{i \omega (k_1 a_1 + \dots + k_n a_n)} e^{-0,5 \omega^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} k_i k_j}$$

Dies ist aber die charakteristische Funktion einer normalverteilten Zufallsgröße mit dem Erwartungswert

$E[z] = k_1 E[x_1] + \dots + k_n E[x_n]$ und dem Streuungsquadrat

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} k_i k_j .$$

Als Ergebnis erkennt man, daß eine Linearkombination normalverteilter Zufallsgrößen wieder normalverteilt ist.

II.2.3 Stochastische Funktionen

II.2.3.1 Erklärung. Der Begriff der stochastischen Funktion läßt sich folgendermaßen einführen[5].

Auf der Menge E der Elementarereignisse e wird eine Funktion

$$\varphi(t) = x(e, t) \text{ f. alle } e \in E$$

erklärt. t ist dabei ein reeller und stetiger Parameter, der hier die Bedeutung der Zeit hat. Für feste Werte der Zeit t ist $x(e, t)$ nur von e abhängig und eine Zufallsvariable. Die Meßbarkeit von $x(e, t)$ im Sinne der Definition vom Abschnitt II.2.1 wird vorausgesetzt.

Ist e fest, so nennt man $x(e, t)$ eine Realisierung des Prozesses $\varphi(t)$.

Unter der Verteilungsfunktion eines solchen zufälligen Prozesses versteht man die Wahrscheinlichkeit

$$P(\varphi(t_1) < x_1, \dots, \varphi(t_n) < x_n) = F_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n), n=1, 2, \dots \quad (II, 27)$$

Den Zusammenhang mit der im Abschnitt II.2.2.4 eingeführten Verteilungsfunktion erhält man, wenn $\varphi(t_v) = \varphi_v$, ($v=1 \dots n$) gesetzt wird.

In dieser Arbeit sind nur solche Prozesse interessant, bei denen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen existieren. Entsprechend der Schreibweise (II, 27), wird für die n-dimensionale Dichte der Ausdruck

$$w_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n),$$

für die n-dimensionale Fouriertransformierte, die charakteristische Funktion, der Ausdruck

$$C_n(\omega_1, \dots, \omega_n, t_1, \dots, t_n)$$

verwendet.

Sind alle endlichdimensionalen Verteilungsfunktionen bekannt, so ist der betreffende stochastische Prozess vollkommen beschrieben.

II.2.3.2 Korrelationsfunktionen. Die Abhängigkeit der Dichte von der Zeit bedingt i. a. auch eine Zeitabhängigkeit der Momente. So ist beispielsweise der Erwartungswert

$$E[x(t)] = a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot w_1(x_1, t_1) dx_1 \quad (II, 28)$$

normalerweise eine Zeitfunktion.

Der Korrelationskoeffizient

$$r = r(t_1, t_2) = \frac{E\{[x(t_1) - a(t_1)] \cdot [x(t_2) - a(t_2)]\}}{\sqrt{E\{[x(t_1) - a(t_1)]^2\} E\{[x(t_2) - a(t_2)]^2\}}}$$

ist eine Funktion von t_1 und t_2 .

Den Erwartungswert

$$E[x(t_1) \cdot x(t_2)] = R_{xx}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{II}, 29)$$

nennt man Autokorrelationsfunktion.

Falls $E[x(t_1)] = E[x(t_2)] = 0$ ist, gilt die Beziehung

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \sigma(t_1) \cdot \sigma(t_2) \cdot r(t_1, t_2).$$

Zwei wichtige Eigenschaften der Autokorrelationsfunktion sollen angegeben werden.

1. Es wird angenommen, daß bei den stochastischen Prozessen $x(t)$ stets gilt

$$\lim_{|t_1 - t_2| \rightarrow \infty} w_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = w_1(x_1, t_1) \cdot w_1(x_2, t_2). \quad (\text{II}, 30)$$

D.h., falls die Beobachtungszeitpunkte t_1 und t_2 nur genügend weit auseinander liegen, sollen $x(t_1)$ und $x(t_2)$ unabhängig sein.

Im Falle der Gültigkeit von Gleichung (II,30) wird dann

$$\lim_{|t_1 - t_2| \rightarrow \infty} R_{xx}(t_1, t_2) = E[x(t_1)] \cdot E[x(t_2)]. \quad (\text{II}, 31a)$$

Ist $E[x(t)] = 0$, so ist sogar

$$\lim_{|t_1 - t_2| \rightarrow \infty} R(t_1, t_2) = 0. \quad (\text{II}, 31b)$$

Hinweis: Die Bedingung $E[x(t)] = 0$ kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit gestellt werden, da die neue Variable $\bar{x}(t) = x(t) - E[x(t)]$ diese Bedingung erfüllt.

2. Da gilt $w_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = w_2(x_2, x_1, t_2, t_1)$, wird

$$R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(t_2, t_1). \quad (\text{II}, 32)$$

Liegen die zwei stochastischen Prozesse $x(t)$ und $y(t)$ vor, so heißt der Erwartungswert

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E[x(t_1)y(t_2)] \quad (\text{II}, 33)$$

Kreuzkorrelationsfunktion von $x(t)$ und $y(t)$. Wird wieder Unabhängigkeit von $x(t_1)$ und $y(t_2)$ für $|t_1 - t_2| \rightarrow \infty$ vorausgesetzt, so gilt entsprechend Gleichung (II,31a):

$$\lim_{|t_1 - t_2| \rightarrow \infty} R_{xy}(t_1, t_2) = E[x(t_1)] E[y(t_2)] \quad (\text{II}, 34)$$

Eine Symmetrieeigenschaft im Sinne der Gleichung (II,32) existiert hier nicht.

Als Norm eines Elementes u mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $w(u)$ bezeichnet man die positive Wurzel aus seinem 2. Moment und schreibt

$$\|u\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} u^2 w(u) du} = \sqrt{E[u^2]}.$$

Es gelten die folgenden Eigenschaften:

1. $\|u\| = 0$ gilt genau dann, wenn u äquivalent 0 ist.

Bemerkung: zwischen äquivalent und identisch soll hier kein Unterschied gemacht werden.

2. $|E[u \cdot v]| \leq \|u\| \cdot \|v\|$. Der Beweis ist einfach; für reelle a, b wird $E[(au + bv)^2] = a^2 E[u^2] + b^2 E[v^2] + 2ab E[uv] \geq 0$; mit $a = E[v^2]$ und $b = -E[uv]$ erhält man die obige Ungleichung.

3. $\|u - v\| \leq \|u - w\| + \|w - v\|$. Die Beziehung heißt Dreiecksungleichung, man beweist sie durch Auswertung des Ausdruckes

$$E\{[(u-w) - (v-w)]^2\} \geq 0.$$

Wendet man den Begriff der Norm auf den stochastischen Prozess $x(t)$ an, so ergibt sich:

$$\|x(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 w_1(x, t) dx} = \sqrt{R_{xx}(t, t)}. \quad (\text{II}, 35)$$

Die Richtigkeit der in Gleichung (II,35) enthaltenen Beziehung

$$E[x^2(t)] = R_{xx}(t, t) \quad (\text{II}, 36)$$

sieht man leicht ein, wenn die linke Seite der Gleichung (II,29) für $t_1 = t_2 = t$ betrachtet wird.

Bemerkung: Formal erhält man die Gleichung (II,36), auch durch Integration nach Gleichung (II,29), wenn dort gesetzt wird [11]:

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2} w_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = w_1(x_1, t_1) \cdot \delta(x_2 - x_1).$$

Die im Punkt 1 genannte Eigenschaft der Norm sagt aus, daß

$R_{xx}(t, t) = 0$ nur möglich ist, wenn die stochastische Funktion $x(t)$ äquivalent 0 ist.

Die Eigenschaft nach Punkt 2 führt mit $u = x(t_1), v = x(t_2)$ zu

$$R_{xx}(t_1, t_2) \leq \sqrt{R_{xx}(t_1, t_1) \cdot R_{xx}(t_2, t_2)} \quad (\text{II}, 37a)$$

oder mit $u=x(t_1)$ und $v=y(t_2)$ zu

$$R_{xy}(t_1, t_2) \leq \sqrt{R_{xx}(t_1, t_1) R_{yy}(t_2, t_2)} \quad (\text{II}, 37b)$$

II.2.3.3 Stationäre Prozesse. Gelten die Beziehungen

$$w_1(x_1, t) = w_1(x_1)$$

$$w_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = w_2(x_1, x_2, t_2 - t_1)$$

$$w_3(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3) = w_3(x_1, x_2, x_3, t_2 - t_1, t_3 - t_1)$$

(II, 38)

usw. ,

so spricht man von einem stationären stochastischen Prozess $x(t)$.

Der Mittelwert $E[x(t)]$ und die Norm $\|x(t)\|$ sind dann beide nicht mehr zeitabhängig. Man erhält

$$E[x(t)] = E[x(t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 w_1(x_1) dx_1 ,$$

$$\|x(t)\|^2 = \|x(t_0)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 w_1(x_1) dx_1 ,$$

worin t_0 ein beliebiger Zeitpunkt ist.

Die Autokorrelationsfunktion ist keine Funktion zweier Variabler mehr, sondern sie hängt nur noch von der Differenz $\tau = t_2 - t_1$ ab:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(t_2 - t_1) = R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 .$$

Bemerkung: Sind die Bedingungen nach Gleichung (II, 38) nicht für alle Dichten erfüllt, so heißt der Prozess im weiteren Sinne stationär, wenn nur die Autokorrelationsfunktion eine Funktion der Differenz $\tau = t_2 - t_1$ ist.

Weitreichende Bedeutung bei der Behandlung stationärer Prozesse hat der Ergodensatz von Birkhoff-Chintschin [5]. Dieser sagt folgendes aus.

Ist $z(t)$ ein stationärer stochastischer Prozess, und existiert für diesen Prozess eine Autokorrelationsfunktion $R_{zz}(\tau)$, die bei $\tau=0$ stetig ist, so gilt mit der Wahrscheinlichkeit 1 :

$$E[z(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T z(u) du . \quad (\text{II}, 39)$$

Das im Integrand stehende $z(u)$ ist dabei eine Realisierung des stochastischen Prozesses $z(t)$, wie sie im Abschnitt II.2.3.1 erklärt wurde.

Gleichung (II,39) sagt aus, daß zur Berechnung des Erwartungswertes von $z(t)$ nicht notwendig die 1. Dichte $w(z)$ bekannt sein muß. Die Integration über irgendeine Realisierung des Prozesses führt mit der Wahrscheinlichkeit 1 zum gleichen Ziel.

Sind die genannten Voraussetzungen erfüllt, so lassen sich auch die höheren Momente als Zeitmittelwerte bestimmen; die Existenz dieser Momente wird natürlich vorausgesetzt.

Insbesondere ist die Korrelationsfunktion $R_{zz}(\tau)$ durch Zeitmittelung bestimmbar, da auch $z(t)z(t+\tau)$ ein stationärer Prozess ist. Es gilt also:

$$R_{zz}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T z(t)z(t+\tau) dt . \quad (\text{II},40)$$

Bemerkung: Die für die Gültigkeit von Gleichung (II,40) notwendige Stationarität von $\bar{z}(t) = z(t)z(t+\tau)$ ist leicht nachprüfbar. Man vergleiche hierzu etwa die Literaturstellen [5], [12].

Sind $x(t)$ und $y(t)$ stationäre Prozesse, deren Autokorrelationsfunktionen entsprechend Gleichung (II,40) berechenbar sind, so ist auch $R_{xy}(\tau)$ als Zeitmittelwert bestimmbar und es gilt

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x(t)y(t+\tau) dt . \quad (\text{II},41)$$

Ohne Beweis werden einige Eigenschaften der Korrelationsfunktionen bei stationären Prozessen angegeben.

1. Ist $R_{zz}(\tau)$ stetig bei $\tau=0$, so ist $R_{zz}(\tau)$ überall stetig [8].
2. $R_{zz}(\tau) = R_{zz}(-\tau)$, die Autokorrelationsfunktion ist eine gerade Funktion. Dies ergibt sich auch aus der Aussage von Gleichung (II,32).
3. Die Autokorrelationsfunktion ist positiv definit im Sinne von Gleichung (II,9c). D.h., bei allen n gilt für beliebige reelle Zahlen t_i und komplexe Zahlen u_i :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{zz}(t_i - t_j) u_i u_j^* \geq 0 . \quad (\text{II},42)$$

Aus dieser Aussage folgt, daß die normierte Funktion

$R_{zz}(\tau)/R_{zz}(0)$ als charakteristische Funktion auffaßbar ist; also existiert auch eine Fouriertransformierte

$$S_{zz}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{zz}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (\text{II},43)$$

$S_{zz}(\omega)$ heißt spektrale Leistungsdichte. Da $R_{zz}(\tau)$ eine gerade Funktion ist, ist $S_{zz}(\omega)$ ebenfalls gerade und reell für alle Werte ω . Aus der Aussage von Gleichung (II,42) folgt weiter, daß $S_{zz}(\omega)$ bis auf einen konstanten Faktor der Größe

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} R_{zz}(\tau) d\tau$$

als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion aufgefaßt werden kann. Es gilt demnach stets:

$$S_{zz}(\omega) \geq 0.$$

Physikalisch deutet man $S_{zz}(\omega)/K d\omega$ als Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Signal $z(t)$ im Frequenzbereich $\omega, \omega+d\omega$ gerade eine Leistung dieser Größe enthält.

II.2.3.4 Das stochastische Integral, Differentiation. Im Rahmen dieser Arbeit sind zwei verschiedene Konvergenzbegriffe von Interesse.

1. Konvergenz in Wahrscheinlichkeit

Gegeben sei eine Folge $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ von zufälligen Größen. Wenn es nun eine zufällige Größe gibt, so daß bei beliebig wählbarem $\epsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|x_n - x| < \epsilon) = 0, \quad (\text{II},44)$$

sagt man, die Folge konvergiere in Wahrscheinlichkeit gegen x . Man schreibt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

x ist bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt.

Konvergiert die Folge $x_1, x_2, \dots$ in Wahrscheinlichkeit gegen x , so konvergiert auch die Folge der entsprechenden Verteilungsfunktionen $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots$ gegen die Verteilungsfunktion $F(x)$ von x in jedem Stetigkeitspunkt von $F(x)$ [2].

2. Konvergenz im Mittel

Die Folge $x_1, x_2, \dots$ zufälliger Größen konvergiert im Mittel gegen x , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0 \quad (\text{II}, 45)$$

ist. Man schreibt

$$x = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} x_n .$$

Notwendig und hinreichend für die Konvergenz im Mittel ist, daß zu jedem $\epsilon > 0$ ein n_0 derart existiert, daß $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ für $m, n > n_0$ wird.

Die Konvergenz im Mittel hat stets die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit zur Folge. Die umgekehrte Aussage ist nicht richtig.

Es sei $f(t)$ eine in $[a, b]$ stetige Funktion, $x(t)$ ein stochastischer Prozess. Unterteilt man $a \leq t \leq b$ in n Teile und betrachtet die Summe

$$\bar{I}_n = \sum_{i=1}^n f(\bar{t}_i) x(\bar{t}_i) (t_i - t_{i-1}) \quad , \bar{t}_i \in [t_{i-1}, t_i] ,$$

so stellt man fest, daß die Summen $\bar{I}_n$ für $n \rightarrow \infty$ und $\max |t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0$ genau dann im Mittel gegen einen Grenzwert I konvergieren, wenn

$$\int_a^b \int_a^b f(t_1) f(t_2) R_{xx}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (\text{II}, 46)$$

existiert.

Man nennt I ein Integral über den zufälligen Prozess $f(t)x(t)$ und schreibt

$$I = \int_a^b f(t) x(t) dt . \quad (\text{II}, 47)$$

Eine entsprechende Erklärung des uneigentlichen Integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) x(t) dt$$

erhält man durch Grenzübergänge $b \rightarrow \infty, a \rightarrow -\infty$.

Existiert das Integral I nach Gleichung (II, 47), so berechnet sich der Erwartungswert von I zu

$$E[I] = \int_a^b f(t) E[x(t)] dt .$$

Den Erwartungswert der zufälligen Größe I^2 erhält man zu

$$E[I^2] = \int_a^b \int_a^b f(t_1)f(t_2) E[x(t_1)x(t_2)] dt_1 dt_2 .$$

Er ist identisch mit dem Integral nach Gleichung (II,46).

Man bezeichnet $x(t)$ als stetig, falls

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|x(t+\epsilon) - x(t)\| = 0 \quad (\text{II}, 48)$$

Ist Die Auswertung dieser Beziehung liefert

$$E[(x(t+\epsilon) - x(t))^2] = R_{xx}(t+\epsilon, t+\epsilon) + R_{xx}(t, t) - R_{xx}(t+\epsilon, t) - R_{xx}(t, t+\epsilon).$$

Ist $R_{xx}(t_1, t_2)$ eine stetige Funktion bei $t_1 = t_2 = t$, so verschwindet die rechte Seite des obigen Ausdruckes für $\epsilon \rightarrow 0$. Daraus folgt, daß die Stetigkeit von $x(t)$ die Stetigkeit von $R_{xx}(t_1, t_2)$ an den diametralen Punkten $t_1 = t_2$ zur Folge hat. Auch der umgekehrte Schluß ist richtig.

Existiert die Ableitung

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} [R_{xx}(t_1, t_2)], \quad (\text{II}, 49)$$

so konvergiert der Ausdruck

$$\frac{x(t+\epsilon) - x(t)}{\epsilon}$$

im Mittel für $\epsilon \rightarrow 0$. Man bezeichnet

$$x'(t) = \text{l.i.m.}_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x(t+\epsilon) - x(t)}{\epsilon}$$

als Ableitung von $x(t)$.

Der Erwartungswert

$$E\left[x(t_1) \frac{x(t_2+\epsilon) - x(t_2)}{\epsilon}\right] = \frac{R_{xx}(t_1, t_2+\epsilon) - R_{xx}(t_1, t_2)}{\epsilon}$$

führt für $\epsilon \rightarrow 0$ auf die Form $E[x(t_1)x'(t_2)]$. Entsprechend wird:

$$E[x'(t_1)x'(t_2)] = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} [R_{xx}(t_1, t_2)] = R_{x'x'}(t_1, t_2). \quad (\text{II}, 50)$$

Gleichung (II,50) stellt die Autokorrelationsfunktion des Prozesses $x'(t)$ dar. Existiert beispielsweise die Ableitung

$$\frac{\partial^4}{\partial t_1^2 \partial t_2^2} [R_{xx}(t_1, t_2)],$$

so existiert auch der stochastische Prozess $x''(t)$.

Beispiel: $x(t)$ sei ein normalverteilter stochastischer Prozess mit der Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(t_1, t_2)$ und dem Erwartungswert $E[x(t)] = a(t)$.

1. Wie lautet die 1. Wahrscheinlichkeitsdichte von

$$I = \int_a^b f(t)x(t) dt,$$

wenn $f(t)$ stetig in $[a, b]$ ist.

2. Wie lautet die 1. Dichte der Ableitung

$$D = \frac{dx(t)}{dt}.$$

Die Ausdrücke (II,46) und (II,49) sollen existieren, damit die Existenz der gesuchten Dichtefunktionen gesichert ist.

Zur Bestimmung der n -dimensionalen charakteristischen Funktion $C_n(\omega_1, \dots, \omega_n, t_1, \dots, t_n)$ des stochastischen Prozesses $x(t)$ ist die Kenntnis der Streuungsmatrix $\underline{B}$ nötig. Man erhält die Elemente b_{ij} ($i, j=1 \dots n$) dieser Matrix zu

$$b_{ij} = R_{xx}(t_i, t_j) - a(t_i)a(t_j).$$

Der Mittelwertvektor $\underline{a}$ besteht aus den Elementen $a(t_i)$ ($i=1 \dots n$).

Durch $\underline{a}$ und $\underline{B}$ ist nach Gleichung (II,24) die charakteristische Funktion bestimmt:

$$C_n(\omega_1, \dots, \omega_n, t_1, \dots, t_n) = e^{i\underline{a}'\underline{\omega}} e^{-0,5\underline{\omega}'\underline{B}\underline{\omega}},$$

oder ausführlicher

$$C_n(\omega_1, \dots, \omega_n, t_1, \dots, t_n) = e^{i \sum_{i=1}^n a(t_i) \omega_i} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n [R_{xx}(t_i - t_j) - a(t_i)a(t_j)] \omega_i \omega_j}. \quad (\text{II,51})$$

Nun zum 1. Punkt, der Bestimmung von I . Das Intervall $[a, b]$ werde in n Teile unterteilt, es sei

$$\bar{I} = \sum_{i=1}^n f(t_i)x(t_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Nach Gleichung (II,20e) läßt sich die charakteristische Funktion von $\bar{I}$ berechnen, es wird

$$\bar{C}(\omega) = e^{i\omega\bar{X}} e^{-0,5\omega^2\bar{Y}},$$

wobei $\bar{X}$ die Form

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n f(t_i) a(t_i) (t_i - t_{i-1})$$

und $\bar{Y}$ die Form

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [R_{xx}(t_i, t_j) - a(t_i) a(t_j)] f(t_i) f(t_j) (t_i - t_{i-1}) (t_j - t_{j-1})$$

hat. Im Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ und $\max |t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0, \max |t_j - t_{j-1}| \rightarrow 0$ wird:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X} = X = \int_a^b f(t) a(t) dt,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Y} = Y = \int_a^b \int_a^b [R_{xx}(t_1, t_2) - a(t_1) a(t_2)] f(t_1) f(t_2) dt_1 dt_2.$$

Beide Integrale existieren nach Voraussetzung, so daß ebenfalls

$$\text{l.i.m. } \bar{I} = I, \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{C}(\omega) = C(\omega) = e^{i\omega X} e^{-0,5\omega^2 Y} \text{ gilt.}$$

Das Ergebnis zeigt, daß die Integration über ein normalverteiltes Signal wieder ein normalverteiltes Signal mit dem Mittelwert X und dem Streuungsquadrat Y ergibt. Signale, die normalverteilt sind, behalten damit ihre Normalverteilung bei, wenn sie durch lineare Filter verformt werden.

Zur Bestimmung der Dichte bzw. der charakteristischen Funktion von $D = dx(t)/dt$ kann man folgendermaßen vorgehen.

Es sei

$$\bar{D} = \frac{x(t+\epsilon) - x(t)}{\epsilon},$$

gesucht ist $\bar{C}(\omega)$, also die charakteristische Funktion von $\bar{D}$.

Dazu setzt man nach der Vorschrift von Gleichung (II, 20e)

$\omega_1 = \omega/\epsilon, \omega_2 = -\omega/\epsilon$ in die zweidimensionale charakteristische Funktion von $x(t)$ ein und erhält:

$$\bar{C}(\omega) = e^{i\omega \bar{U}} e^{-0,5\omega^2 \bar{V}}$$

mit

$$\bar{U} = \frac{a(t+\epsilon) - a(t)}{\epsilon}$$

und

$$\bar{V} = \frac{1}{\epsilon^2} [R_{xx}(t, t) - 2R_{xx}(t+\epsilon, t) + R_{xx}(t+\epsilon, t+\epsilon) - a^2(t) - a^2(t+\epsilon) + 2a(t)a(t+\epsilon)]$$

Im Falle $\epsilon \rightarrow 0$ wird l.i.m. $\bar{D} = D$ und

$$\epsilon \rightarrow 0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{C}(\omega) = C(\omega) = e^{i\omega U} e^{-0,5\omega^2 V}$$

mit $U = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{U} = a'(t)$ und

$$V = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{V} = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} [R_{xx}(t_1, t_2)]_{t_1=t_2=t} - a'^2(t).$$

Das Ergebnis zeigt, daß $x(t)$ normalverteilt ist und den Erwartungswert U sowie das Streuungsquadrat V besitzt.

Beide behandelten Fälle führen zu folgender Aussage. Ist $x(t)$ ein normalverteilter Prozess, der durch Integration über ein Intervall $[a, t]$ aus einem stochastischen Prozess $u(t)$ berechnet wurde, so ist $u(t)$ ebenfalls ein normalverteilter Prozess.

II.2.3.5 Reihenentwicklungen. Besitzt der stochastische Prozess $x(t)$ Ableitungen beliebig hoher Ordnung in $|t| < T$, anders ausgedrückt, ist für $|t_1|, |t_2| < T$ die Korrelationsfunktion $R_{xx}(t_1, t_2)$ analytisch, so gilt [2]

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{(n)}(t_0) \frac{(t-t_0)^n}{n!} \quad \text{f. } |t|, |t_0| < T. \quad (\text{II}, 52)$$

$x^{(n)}(t_0)$ ist dabei der n -fach abgeleitete Prozess an der Stelle $t=t_0$. Ist etwa $x(t)$ normalverteilt, so sind auch alle Ableitungen $x^{(n)}(t_0)$ normalverteilte Zufallsvariable.

In der Literaturstelle [12] wird bewiesen, daß bei stationären stochastischen Prozessen $x(t)$ gilt:

$$x(t) = \text{l.i.m.} \sum_{n=0}^N x^{(n)}(t_0) \frac{(t-t_0)^n}{n!}.$$

Es wird bemerkt, daß die Reihe nicht nur im Mittel, sondern sogar fast sicher konvergiert. Der Begriff "fast sicher konvergent" wurde in dieser Arbeit nicht eingeführt, er schließt die Konvergenz im Mittel ein.

Neben der Potenzreihenentwicklung wird häufig eine Orthogonalreihenentwicklung angegeben [3]. Man geht dabei von einem vollständigen Orthonormalsystem $e_1(t), e_2(t), \dots$ in $t \in [a, b]$ aus und findet die Beziehung

$$x(t) = \text{l.i.m.} \sum_{n=1}^N \sigma_n x_n e_n(t). \quad (\text{II}, 53)$$

Die x_n in dieser Gleichung sind zufällige Größen, die der Beziehung

$$E[x_n x_m] = \begin{cases} 0 & \text{f. } n \neq m \\ 1 & \text{f. } n = m \end{cases}$$

genügen. Für die Korrelationsfunktion findet man die Reihendarstellung

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 e_n(t_1) e_n(t_2) . \quad (\text{II}, 54)$$

Orthogonaldarstellungen von stochastischen Prozessen werden im Rahmen dieser Arbeit nicht verwendet.

II.3 Die Lösungen von Differentialgleichungen mit stochastischen Koeffizienten

II.3.1 Die Differentialgleichung 1. Ordnung

Die homogene Differentialgleichung

$$y'(t) + b_0(t)y(t) = 0 \quad (\text{II}, 55a)$$

mit der Anfangsbedingung $y(0)=1$ hat die formale Lösung

$$y(t) = e^{-\int_0^t b_0(u) du} . \quad (\text{II}, 55b)$$

Gleichung (II, 55b) stellt sicher dann die Lösung der gegebenen Differentialgleichung dar, wenn $b_0(t)$ eine stetige Funktion im interessierenden Bereich ist.

Nun sei $b_0(t)$ eine stetige stochastische Funktion. In diesem Fall läßt sich die Lösung der Differentialgleichung ebenso in der Form von Gleichung (II, 55b) darstellen, wenn nur das Integral

$$\int_0^t b_0(u) du$$

erklärt ist. Jede Realisierung des Prozesses $b_0(t)$ ist nämlich äquivalent mit einer stetigen Funktion und liefert eine stetige Funktion $y(t)$. Diese läßt sich wiederum als Realisierung eines stochastischen Prozesses $y(t)$ auffassen.

Hat $b_0(t)$ den Erwartungswert $E[b_0(t)]$ und ist $r_{bb}(t_1, t_2)$ die Korrelationsfunktion des Prozesses $b_0(t) - E[b_0(t)]$, so existiert eine Lösung entsprechend Gleichung (II, 55b) genau dann, wenn die Integrale

$$\int_0^t E[b_0(u)] du, \int_0^t \int_0^t r_{bb}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (II, 56)$$

existieren. Ist die Existenz dieser Integrale für alle Werte t gesichert, und sind weiterhin gewisse Stabilitätskriterien erfüllt, so stellt die Differentialgleichung

$$y'(t) + b_0(t)y(t) = x(t) \quad (II, 57a)$$

ein lineares System mit der Impulsantwort

$$h(t, \tau) = e^{-\int_{\tau}^t b_0(u) du} \quad (II, 57b)$$

dar. Stabilitätsdefinitionen werden im Abschnitt II.4. angegeben.

Wird vorausgesetzt, daß die Korrelationsfunktion

$$R_{bb}(t_1, t_2) = E[b_0(t_1)b_0(t_2)]$$

nicht nur stetig, sondern sogar analytisch für alle $t_1, t_2 \in \bar{R}$ ist, so existieren beliebig hohe Ableitungen der Impulsantwort nach der Zeit t und ebenso nach τ .

So lautet beispielsweise die 2. Ableitung

$$\frac{\partial^2 h(t, \tau)}{\partial t^2} = [-b_0'(t) + b_0^2(t)] \cdot e^{-\int_{\tau}^t b_0(u) du}.$$

Man erkennt direkt, daß diese und alle höheren Ableitungen existieren und kann daher die Impulsantwort auch als Reihe

$$h(t, \tau) = 1 + \frac{\partial}{\partial t} [h(t, \tau)] \frac{(t-\tau)}{1!} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} [h(t, \tau)] \frac{(t-\tau)^2}{2!} + \dots, t \geq \tau$$

darstellen.

II.3.2 Die Reihendarstellung der Lösung bei Differentialgleichungen höherer Ordnung

Wir gehen von der homogenen Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + b_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + b_0(t)y(t) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y^{(v)}(t) = 0 \text{ für } v=0, \dots, n-2; y^{(n-1)}(t) = 1$$

aus. Die Koeffizientenfunktionen $b_v(t)$, $v=0, \dots, n-1$ sollen statistische Funktionen sein mit den Eigenschaften, daß alle Korre-

lationsfunktionen

$$R_{b_v b_v}(t_1, t_2) = E[b_v(t_1)b_v(t_2)] \quad , v=0, \dots, n-1,$$

analytisch für $t_1, t_2 \in \bar{R}$ sind. In diesem Fall existieren beliebig hohe Ableitungen der Koeffizientenfunktionen, die Lösung der Differentialgleichung läßt sich in Form einer Reihe

$$y(t) = \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} + y^{(n)}(t_0) \frac{(t-t_0)^n}{n!} + \dots$$

angeben. Die Ausdrücke $y^{(v)}(t_0)$, $v=n, n+1, \dots$ bestimmt man formal nach dem im Abschnitt I.4.2 angegebenen Verfahren.

So lautet beispielsweise

$$y^{(n)}(t_0) = -b_{n-1}(t_0), y^{(n+1)}(t_0) = b_{n-1}^2(t_0) - b'_{n-1}(t_0) - b_{n-2}(t_0), \dots$$

Die Impulsantwort $h_0(t, \tau)$ ist eine Lösung der homogenen Differentialgleichung, man erhält daher auch eine Reihendarstellung für die Impulsantwort. Die Reihenglieder lassen sich aus der im Teil I angegebenen Gleichung (I,54) ermitteln.

Damit der für lineare Systeme gültige Zusammenhang

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h_0(t, \tau) x(\tau) d\tau \quad (II, 58a)$$

existiert, müssen zusätzlich zwei Bedingungen erfüllt sein.

1. Das Integral

$$\int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t E[h_0(t, \tau_1) x(\tau_1) \cdot h_0(t, \tau_2) x(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 \quad (II, 58b)$$

muß existieren; man vergleiche dazu Gleichung (II,46).

2. Eine Stabilitätsbedingung, die im nächsten Abschnitt behandelt wird, muß erfüllt sein.

Steht auf der rechten Seite der Differentialgleichung nicht $x(t)$, wie in Gleichung (II,58a), sondern ein Ausdruck $R(p, t)x(t)$ entsprechend Gleichung (I,11b) mit stochastischen Funktionen $a_v(t)$, $v=0, \dots, m$, so berechnet man $h(t, \tau)$ aus $h_0(t, \tau)$ formal nach der Gleichung (I,50).

Es wird vorausgesetzt, daß alle Funktionen $a_v(t)$ stetig sind und darüber hinaus mindestens v stetige Ableitungen besitzen.

Im Falle $m=n$ enthält die Impulsantwort einen Anteil

$a_n(t)\delta(t-\tau)$, wobei $a_n(t)$ eine stochastische Funktion sein kann.

Es wird nachgetragen, daß in den Fällen, in denen nicht alle Koeffizientenfunktionen $b_v(t)$, $a_v(t)$, ($v=0, \dots, n-1$; $\mu=0, \dots, m$)

stochastisch sind, diese Funktionen die im Abschnitt 4 vom Teil I genannten Eigenschaften haben sollen.

II.4 Stabilitätsdefinitionen, das Mittelwertsystem

II.4.1 Das Mittelwertsystem

Erfüllen alle Funktionen $b_v(t), a_\mu(t)$ die im Abschnitt II.3.2 genannten Eigenschaften, so findet man für $h_0(t, \tau)$ bzw. für $h(t, \tau)$ eine Reihendarstellung, deren Koeffizienten von den Koeffizientenfunktionen der Differentialgleichung abhängen. Die Frage, ob der ermittelte Ausdruck für $h(t, \tau)$ tatsächlich Impulsantwort eines stabilen Systems ist, wird vorerst zurückgestellt.

Zunächst berechnen wir den Erwartungswert $h_M(t, \tau) = E[h(t, \tau)]$, dessen Existenz wir voraussetzen. Liegt $h(t, \tau)$ als Reihe vor, so erhält man für $h_M(t, \tau)$ ebenfalls eine Reihendarstellung, wenn die einzelnen Reihenglieder gemittelt werden.

So hat beispielsweise der Erwartungswert der Reihe für $h_0(t, \tau)$ die Form

$$h_M(t, \tau) = \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} - E[b_{n-1}(\tau)] \frac{(t-\tau)^n}{n!} + \\ \{E[b_{n-1}^2(\tau)] - E[b'_{n-1}(\tau)] - E[b_{n-2}(\tau)]\} \frac{(t-\tau)^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \\ t > \tau$$

Im Abschnitt II.5 wird gezeigt, wie die Erwartungswerte in dieser Gleichung ermittelt werden können, wenn die Koeffizientenfunktionen normalverteilt sind.

Existiert $h_M(t, \tau)$, so gelten die folgenden Eigenschaften.

1. $h_M(t, \tau) = 0$, für $t < \tau$, da $h(t, \tau) = 0$ für $t < \tau$ ist.
2. Ist $h_M(t, \tau)$ als Reihe darstellbar, d.h., erfüllen die Funktionen $b_v(t), a_\mu(t)$, ($v=0, \dots, n-1; \mu=0, \dots, m$) die im Abschnitt II.3.2 genannten Voraussetzungen, so ist $h_M(t, \tau)$ für $t \geq \tau$ eine stetige Funktion. Sie ist im Falle $h_M(t, \tau) = E[h_0(t, \tau)]$ für $t > \tau$ sogar beliebig oft differenzierbar.
3. Sind die Koeffizientenfunktionen der Differentialgleichung alle stationär, so gilt $h_M(t, \tau) = h_M(t - \tau)$. In diesem Falle sind nämlich die in der Reihendarstellung auftretenden Erwartungs-

werte unabhängig von τ .

Erfüllt $h_M(t, \tau)$ neben diesen Eigenschaften noch die Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h_M(t, \tau)| d\tau < K < \infty \quad \text{f. alle } t, \quad (\text{II}, 59)$$

so läßt sich $h_M(t, \tau)$ als Impulsantwort eines linearen Systems mit determiniert variablen, bzw. festen Parametern auffassen.

Dieses System soll Mittelwertsystem genannt werden.

Bemerkung: Nach den Voraussetzungen über die Koeffizientenfunktionen $a_\nu(t)$, $\nu=0, \dots, m$ im Abschnitt II.3.2 ist die Darstellung $h(t, \tau) = h_1(t, \tau) + a_n(t)\delta(t-\tau)$ für die Impulsantwort möglich, wenn $m=n$ ist. Die in diesem Abschnitt angegebenen Stabilitätsbedingungen umfassen jeweils den Fall $m=n$, wenn $h(t, \tau)$ durch $h_1(t, \tau)$ ersetzt wird.

Die Stabilität des Mittelwertsystems, d.h. die Existenz der Bedingung nach Gleichung (II, 59) ist notwendig, aber nicht hinreichend für die Stabilität des stochastischen Systems.

Als Reaktion auf ein Signal $x(t)$ liefert das Mittelwertsystem das Signal

$$y_M(t) = \int_{-\infty}^t h_M(t, \tau) x(\tau) d\tau. \quad (\text{II}, 60a)$$

Auf das gleiche Signal $x(t)$ reagiert das stochastische System mit

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad (\text{II}, 60b)$$

die Existenz der Beziehung (II, 60b) wird vorausgesetzt.

Ist $x(t)$ eine determinierte Funktion, so berechnet sich der Erwartungswert von $y(t)$ zu

$$E[y(t)] = \int_{-\infty}^t E[h(t, \tau)] x(\tau) d\tau. \quad (\text{II}, 60c)$$

Daraus folgt die Beziehung

$$E[y(t)] = y_M(t). \quad (\text{II}, 60d)$$

Ist $x(t)$ eine stochastische Funktion, die unabhängig von $h(t, \tau)$ ist, so ist Gleichung (II, 60d) ebenfalls gültig, wenn in den Gleichungen (II, 60a) und (II, 60c) $x(t)$ durch $E[x(t)]$ ersetzt wird.

Im Falle der Stabilität des statistischen Systems liefert demnach das zugehörnde Mittelwertsystem als Antwort auf determinierte Signale $x(t)$ Ausgangssignale $y_M(t)$, die den Erwartungs-

werten der Ausgangssignale $y(t)$ des statistischen Systems entsprechen.

Bezüglich solcher Mittelwerte kann demnach das stochastische System durch ein nichtstochastisches lineares System ersetzt werden. Dieses System ist sogar zeitinvariant, wenn die Parameter des stochastischen Systems stationär sind.

Systemuntersuchungen lassen sich auf diese Weise sehr einfach behandeln, wenn es nur auf Mittelwerte der Ausgangssignale ankommt. Es zeigt sich, daß Mittelwertsysteme i. a. nicht durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben werden. Dies geht auch aus den im Abschnitt II.5 behandelten Beispielen hervor.

II.4.2 Die Stabilität

Zunächst sollen nur solche Eingangssignale zugelassen werden, die unabhängig von der Impulsantwort $h(t, \tau)$ sind. Die Klasse dieser Eingangsfunktionen werde mit U bezeichnet, sie enthält auch alle determinierten Funktionen. Im Falle determinierter Funktionen sei als Norm $\|x(t)\| = \max |x(t)|$, $t \in \bar{R}$ definiert.

Definition: Gegeben sei eine beliebige Funktion $x(t) \in U$ mit gleichmäßig beschränkter Norm, d. h. $\|x(t)\| < K_1$. Existiert dann die Norm des zugehörigen Ausgangssignales $\|y(t)\|$, und ist diese Norm ebenfalls gleichmäßig beschränkt, also $\|y(t)\| < K_2 < \infty$, so heißt das System stabil.

Aus dem Abschnitt II.2.3.4 ist bekannt, daß die Existenz der Norm $\|y(t)\|$ die Existenz des Integrales

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau \quad (\text{II}, 61)$$

gewährleistet.

Das Quadrat der Norm von $y(t)$ ergibt sich unter Beachtung der in der Definition gemachten Voraussetzungen zu:

$$\|y(t)\|^2 = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t E[h(t, \tau_1)h(t, \tau_2)] E[x(\tau_1)x(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2. \quad (\text{II}, 62)$$

In Fällen determinierter Funktionen $x(t)$ ist der Erwartungswert $E[x(\tau_1)x(\tau_2)]$ durch das Produkt $x(\tau_1)x(\tau_2)$ zu ersetzen.

Die Abschätzung

$$|E[x(\tau_1)x(\tau_2)]| \leq \|x(\tau_1)\| \cdot \|x(\tau_2)\| < K_1^2 \text{ für alle } t$$

führt auf die hinreichende Stabilitätsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[h(t, \tau_1)h(t, \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 < K < \infty \quad \text{für alle } t. \quad (\text{II}, 63)$$

Notwendig für die Stabilität ist jedenfalls die Stabilität des Mittelwertsystems, denn eine beschränkte Norm von $y(t)$ hat einen beschränkten Mittelwert als Voraussetzung.

Unter Beachtung der Beziehung

$$\|y(t)\|^2 \geq |E[y(t)]|^2$$

erhält man die Abschätzung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[h(t, \tau_1)h(t, \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 \geq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |E[h(t, \tau)]| d\tau \right\}^2.$$

Eine weitere hinreichende Stabilitätsbedingung leitet sich aus der Gleichung (II, 63) ab, wenn die Beziehung

$$|E[h(t, \tau_1)h(t, \tau_2)]| \leq \|h(t, \tau_1)\| \cdot \|h(t, \tau_2)\| \quad \text{verwendet wird.}$$

Man erhält dann als hinreichende Stabilitätsbedingung die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|h(t, \tau)\| d\tau < K < \infty \quad \text{f. alle } t. \quad (\text{II}, 64)$$

In der Literatur wird manchmal der Begriff der "Stabilität im Mittel" und der "mittleren quadratischen Stabilität" verwendet (z.B. [17]). Dabei ist die Stabilität im Mittel so definiert, daß eine Eingangsfunktion mit gleichmäßig beschränktem Mittelwert eine Ausgangsfunktion mit ebenfalls gleichmäßig beschränktem Mittelwert zur Folge haben soll. Zur Definition der mittleren quadratischen Stabilität werden statt der Mittelwerte die Normen der Ein- und Ausgangssignale betrachtet. Diese beiden Stabilitätsbegriffe sollen in der vorliegenden Arbeit nicht verwendet werden. Die Stabilität im Mittel gewährleistet nämlich nicht die Existenz des Zusammenhanges zwischen $x(t)$ und $y(t)$ nach der Gleichung (II, 61). Hier wird stattdessen der Begriff der Stabilität des Mittelwertsystems verwendet. Die mittlere quadratische Stabilität erlaubt nicht, allgemeine Stabilitätskriterien der Art der Gleichungen (II, 63) und (II, 64) anzugeben. Das liegt daran, daß diese Stabilitätsdefinition keine Unabhängigkeit von Impulsantwort und Eingangssignalen voraussetzt.

Für den Fall, daß die Eingangssignale abhängig von der Impulsantwort sein dürfen, wird die "erweiterte Stabilität" folgendermaßen definiert.

Definition: $x(t)$ sei ein beliebiges Eingangssignal, und die Norm von $x^2(t)$ sei gleichmäßig beschränkt, es soll also $\|x^2(t)\| < K_1 < \infty$ für alle zugelassenen $x(t)$ gelten. Existiert die Norm von $y(t)$, und ist diese Norm ebenso gleichmäßig beschränkt, d.h. $\|y(t)\| < K_2 < \infty$, so heißt das System erweitert stabil.

Das Quadrat der Norm von $y(t)$ lautet

$$\|y(t)\|^2 = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t E[h(t, \tau_1)h(t, \tau_2)x(\tau_1)x(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2. \quad (\text{II}, 65)$$

Die Abschätzung

$$\begin{aligned} |E[h(t, \tau_1)h(t, \tau_2)x(\tau_1)x(\tau_2)]| &\leq \|h(t, \tau_1)h(t, \tau_2)\| \cdot \|x(\tau_1)x(\tau_2)\| \\ &\leq \|h(t, \tau_1)h(t, \tau_2)\| \{ \|x^2(\tau_1)\| \cdot \|x^2(\tau_2)\| \}^{1/2} \\ &\leq \|h(t, \tau_1)h(t, \tau_2)\| K_1 \end{aligned}$$

liefert die hinreichende Bedingung für die erweiterte Stabilität

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|h(t, \tau_1)h(t, \tau_2)\| \cdot d\tau_1 d\tau_2 < K < \infty \text{ für alle } t. \quad (\text{II}, 66)$$

Die linke Seite der Gleichung (II,66) läßt sich leicht mit der Ungleichung

$$\|h(t, \tau_1)h(t, \tau_2)\| \leq \sqrt{\|h^2(t, \tau_1)\| \cdot \|h^2(t, \tau_2)\|}$$

majorisieren, als weitere Bedingung für die erweiterte Stabilität erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\|h^2(t, \tau)\|} d\tau < K < \infty \text{ für alle } t. \quad (\text{II}, 67)$$

Schätzt man den Integrand der Gleichung (II,65) nach der anderen Richtung hin ab, so erhält man die Beziehung (II,63). Die erweiterte Stabilität hat also die Stabilität im Sinne der 1. Definition zur Folge.

II.4.3 Das Streuungssystem

Im Abschnitt II.4.1 wurde das Mittelwertssystem eingeführt. Dieses nichtstochastische lineare System ersetzt das stati-

stische System bezüglich der Mittelwerte seiner Ausgangssignale bei einer gewissen Klasse von Eingangssignalen.

Eine andere Fragestellung führt zu einem nichtstatistischen System, das Streuungssystem genannt werden soll.

Die Frage lautet, gibt es ein lineares System, das auf Eingangssignale $x(t)$ mit Ausgangssignalen $y(t)$ derart reagiert, daß die Beziehung

$$y_S^2(t) = E[y^2(t)] \quad (II,68)$$

gilt. $E[y^2(t)]$ soll dabei der Erwartungswert des quadrierten Ausgangssignales $y(t)$ des stochastischen Systems sein, wenn dieses mit dem gleichen Signal $x(t)$ erregt wird. Wir betrachten hier nur determinierte Eingangssignale $x(t)$.

Die Frage muß verneint werden, ein zu dem stochastischen System gehörendes lineares System mit den geforderten Eigenschaften existiert nicht.

Zum Beweis gehen wir folgendermaßen vor. $h_S(t, \tau)$ sei die Impulsantwort des linearen Streuungssystems, dessen Existenz angenommen wird. Dann erhält man für determinierte $x(t)$

$$y_S(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t h_S(t, \tau_1) h_S(t, \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Andererseits ist in diesem Fall

$$E[y^2(t)] = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t E[h(t, \tau_1) h(t, \tau_2)] x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Gleichung (II,68) ist nur dann allgemein gültig, wenn

$$h_S(t, \tau_1) h_S(t, \tau_2) = E[h(t, \tau_1) h(t, \tau_2)] \quad (II,69a)$$

ist. Setzt man in Gleichung (II,69a) $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, so erhält man

$$h_S^2(t, \tau) = \|h(t, \tau)\|^2 \text{ bzw. } |h_S(t, \tau)| = \|h(t, \tau)\|. \quad (II,69b)$$

Gleichung (II,69b) liefert zusammen mit der Gleichung

(II,69a) die Beziehung

$$|E[h(t, \tau_1) h(t, \tau_2)]| = \|h(t, \tau_1)\| \cdot \|h(t, \tau_2)\|. \quad (II,70)$$

Damit ist man auf einen Widerspruch gestoßen. Bei stochastischen Funktionen $h(t, \tau)$ ist Gleichung (II,70) nur im Falle $\tau_1 = \tau_2$ gültig. In anderen Fällen ist die rechte Seite der Gleichung (II,70) größer als die linke. Bei Systemen mit determinierten Parametern ist Gleichung (II,70) richtig, wenn der Erwartungswert links als Produkt der Beträge der Funktionen aufgefaßt

wird. Die Norm entspricht dem Betrag der jeweiligen Funktionen. Ein nichtlineares System mit der geforderten Eigenschaft existiert natürlich. Dieses wird durch die Beziehung

$$y(t) = \left[\int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t h_2(t, \tau_1, \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right]^{1/2} \quad (\text{II}, 71a)$$

$$\text{mit} \quad h_2(t, \tau_1, \tau_2) = E[h(t, \tau_1) h(t, \tau_2)] \quad (\text{II}, 71b)$$

beschrieben.

II.5 Stochastische Systeme, die durch Differentialgleichungen 1. Ordnung beschrieben werden

II.5.1 Allgemeine Bemerkungen

Die hier untersuchten Systeme werden durch eine Differentialgleichung der Form

$$y'(t) + b(t)y(t) = a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) \quad (\text{II}, 72)$$

beschrieben. Vorausgesetzt wird, daß jedenfalls $b(t)$ eine stochastische Funktion ist. $a_0(t)$ und $a_1(t)$ können ebenfalls stochastische Funktionen sein. Weiterhin wird verlangt, daß $a_0(t)$ stetig und $a_1(t)$ differenzierbar ist. Die stochastische Funktion $b(t)$ soll normalerweise beliebig viele Ableitungen besitzen, so daß eine Reihendarstellung der Impulsantwort möglich ist.

Die Stabilitätskriterien, die im kommenden Abschnitt II.5.2 für normalverteilte Funktionen $b(t)$ angegeben werden, setzen nur die Stetigkeit von $b(t)$ voraus.

Gemeinsame Annahme für alle im Abschnitt II.5 und auch in den folgenden Abschnitten behandelten Probleme, ist die Stationarität aller in den Differentialgleichungen auftretenden Koeffizientenfunktionen. Nichtstochastische Koeffizienten sollen konstant sein.

Ausgehend von der formalen Impulsantwort $h_0(t, \tau)$ des Systems

$$y'(t) + b(t)y(t) = x(t) \quad (\text{II}, 73a)$$

$$h_0(t, \tau) = e^{-\int_{\tau}^t b(u) du}, \quad (\text{II}, 73b)$$

berechnet man formal die Impulsantwort des Systems nach Gleichung (II,72):

$$h(t, \tau) = h_0(t, \tau) [a_0(\tau) - a_1(\tau)b(\tau) - a_1'(\tau)] + a_1(t)\delta(t-\tau). \quad (\text{II}, 74)$$

Ein System mit einer solchen Impulsantwort reagiert auf das Eingangssignal $x(t)$ mit

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h_1(t, \tau)x(\tau) d\tau + a_1(t)x(t), \quad (\text{II}, 75a)$$

wenn

$$h_1(t, \tau) = e^{-\int_{\tau}^t b(u) du} \cdot A(\tau); A(\tau) = a_0(\tau) - a_1(\tau)b(\tau) - a_1'(\tau) \quad (\text{II}, 75b)$$

ist.

Zur Anwendung des hinreichenden Stabilitätskriteriums nach Gleichung (II,64) berechnet man

$$\|h_1(t, \tau)\| = \left\{ E \left[e^{-2 \int_{\tau}^t b(u) du} \cdot A^2(\tau) \right] \right\}^{1/2} \quad (\text{II}, 76a)$$

und erhält die Abschätzung

$$\|h_1(t, \tau)\|^2 \leq \| e^{-2 \int_{\tau}^t b(u) du} \| \cdot \|A^2(\tau)\|. \quad (\text{II}, 76b)$$

Der 2. Faktor in der Gleichung (II,76b) läßt sich bei vorgegebenen Fällen meist leicht abschätzen. Wir setzen voraus, daß dieser Faktor durch eine Konstante $K > 0$ nach oben abschätzbar ist, dies ist beispielsweise ganz sicher dann erfüllt, wenn die Momente 16. Ordnung der zufälligen Variablen $b(\tau)$, $a_0(\tau)$, $a_1(\tau)$ und $a_1'(\tau)$ existieren.

Zur weiteren Stabilitätsuntersuchung ist somit nur noch die Beziehung

$$S(t, \tau) = \left\{ \| e^{-2 \int_{\tau}^t b(u) du} \|^{1/2} \right\} = \left\{ E \left[e^{-4 \int_{\tau}^t b(u) du} \right] \right\}^{1/4} \quad (\text{II}, 77)$$

zu betrachten. Stabil ist unser System, wenn die Ungleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(t, \tau) d\tau < C < \infty \text{ für alle } t \in \bar{R} \quad (\text{II}, 78a)$$

und die Bedingung

$$\|A^2(\tau)\| < K < \infty \quad (\text{II}, 78b)$$

erfüllt ist.

Die Bedingungen für die erweiterte Stabilität lauten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{S}(t, \tau) d\tau < C < \infty \text{ für alle } t \in \bar{R} \quad (\text{II}, 79a)$$

mit

$$\bar{S}(t, \tau) = \left\{ \left\| e^{-4 \int_{\tau}^t b(u) du} \right\| \right\}^{1/4} \quad \text{sowie } \|A^4(\tau)\| < K < \infty. \quad (\text{II}, 79b)$$

II.5.2 Die Stabilität bei normalverteiltem $b(t)$

Bei der Ableitung der folgenden Stabilitätskriterien wird nur die Normalverteilung von $b(t)$ vorausgesetzt. Die Kriterien sind daher auch in den Fällen anwendbar, bei denen die übrigen Koeffizienten der Differentialgleichung nicht normalverteilt sind. Aus der Normalverteilung von $b(t)$ folgt, daß auch das Integral

$$z = \int_{\tau}^t b(u) du$$

normalverteilt ist. Führt man die Bezeichnungen

$$b(t) = c + \beta(t); c = E[b(t)]; r_{bb}(\tau) = E[\beta(t)\beta(t+\tau)]$$

ein, so findet man den Erwartungswert von z

$$E[z] = \bar{z} = \int_{\tau}^t E[b(u)] du = c(t - \tau)$$

und die quadratische Streuung von z

$$E[(z - \bar{z})^2] = \sigma_z^2 = \int_{\tau}^t \int_{\tau}^t r_{bb}(u - v) du dv.$$

Damit ist die Verteilungsdichte der Zufallsvariablen z festgelegt, sie lautet

$$w(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} e^{-\frac{(z - \bar{z})^2}{2\sigma_z^2}}.$$

Schließlich berechnet man den Erwartungswert

$$E[e^{-4z}] = S^4(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4z} w(z) dz,$$

der zur Untersuchung der Stabilität wichtig ist.

$E[e^{-z}]$ ist der Erwartungswert der Impulsantwort des Systems

$$y'(t) + b(t)y(t) = x(t), \quad (\text{II}, 80a)$$

$E[e^{-4z}]$ der Mittelwert der Impulsantwort von

$$y'(t) + 4b(t)y(t) = x(t). \quad (\text{II}, 80b)$$

Im Zusammenhang mit der Kontrolle der Stabilität im Mittel des Systems nach Gleichung (II, 80a), (vgl. dazu die Bemerkungen im Abschnitt II.4.2) wird der Erwartungswert $E[e^{-z}]$ in der Literaturstelle [17] angegeben.

Das Ergebnis lautet für $t \geq \tau$:

$$E[e^{-z}] = e^{-c(t-\tau)} e^{0,5 \int_{\tau}^t \int_{\tau}^t r_{bb}(u-v) du dv} \quad (II,81a)$$

Den Erwartungswert $E[e^{-4z}]$ findet man leicht, wenn nur in Gleichung (II,81a) c durch $4c$ sowie $r_{bb}(\tau)$ durch $16r_{bb}(\tau)$ ersetzt wird. Für $t \geq \tau$ gilt also

$$E[e^{-4z}] = e^{-4c(t-\tau)} e^{8 \cdot \int_{\tau}^t \int_{\tau}^t r_{bb}(u-v) du dv} \quad (II,81b)$$

Zur weiteren Auswertung verwenden wir die Beziehung [17]

$$\int_{\tau}^t \int_{\tau}^t r_{bb}(u-v) du dv = 2(t-\tau) \int_0^{t-\tau} r_{bb}(u) du - 2 \int_0^{t-\tau} u r_{bb}(u) du \quad (II,82a)$$

Man setzt voraus, daß

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x u r_{bb}(u) du$$

existiert und die Abschätzung

$$\left| \int_0^x u r_{bb}(u) du \right| < K < \infty \text{ für alle } x > 0 \quad (II,82b)$$

gemacht werden kann. Mit $D = e^{16K}$ erhält man dann

$$E[e^{-4z}] \leq D e^{-4c(t-\tau)} e^{-16(t-\tau) \int_0^{t-\tau} r_{bb}(u) du} \quad (II,83)$$

Für die Stabilitätskontrolle ist das Verhalten von $E[e^{-4z}]$ für große Werte $t-\tau$ maßgebend. Ist

$$s(\omega) = 2 \int_0^{\infty} r_{bb}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (II,84)$$

die spektrale Leistungsdichte des Signals $b(t)-c$, so genügt

$E[e^{-4z}]$ für große Werte $t-\tau$ der Ungleichung

$$E[e^{-4z}] = S^4(t, \tau) \leq D e^{-4(t-\tau)[c-2s(0)]} \quad (II,85a)$$

Man erkennt sofort, daß im Falle

$$c > 2s(0) \quad (II,85b)$$

die Ungleichung (II,78a) erfüllt ist.

Damit wurde abgeleitet, daß die Beziehungen (II,85b) und

(II,78b) hinreichende Bedingungen für die Stabilität angeben, wenn nur $b(t)$ normalverteilt ist.

Im Abschnitt II.5.4 wird ein Verfahren beschrieben, das Stabilitätskriterien auch in solchen Fällen liefert, bei denen keine Normalverteilung des Koeffizienten $b(t)$ vorliegt.

II.5.3 Mittelwertsysteme, Beispiele

II.5.3.1 Mittelwertsysteme zur Differentialgleichung

$y' + b(t)y = x$. Wir betrachten das stochastische System, das durch die Differentialgleichung

$$y'(t) + b(t)y(t) = x(t) \quad (\text{II,86a})$$

mit normalverteiltem $b(t)$ beschrieben wird. In diesem Fall ist die Impulsantwort des Mittelwertsystems durch die Gleichung (II,81a) gegeben und lautet

$$h_M(t, \tau) = e^{-c(t-\tau)} e^{0,5 \int_0^{t-\tau} \int_0^{t-\tau} r_{bb}(u-v) du dv} \quad (\text{II,86b})$$

Das System ist stabil, wenn nach Gleichung (II,85b)

$$c > 2s(0) \quad (\text{II,87a})$$

ist. Für die Stabilität des Mittelwertsystems findet man die hinreichende Bedingung

$$c > 0,5s(0), \quad (\text{II,87b})$$

sie ist natürlich immer erfüllt, wenn das stochastische System stabil ist.

Beispiel: Der stochastische Prozess $b(t) - c$ habe die Autokorrelationsfunktion

$$r_{bb}(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|}; a > 0. \quad (\text{II,88a})$$

Man findet dann leicht

$$s(\omega) = \frac{2\sigma^2}{a + i\omega}$$

und $s(0) = 2\sigma^2/a$.

Stabil ist das System, wenn gilt

$$c > 4 \frac{\sigma^2}{a} \quad (\text{II,88b})$$

Das Mittelwertsystem ist bereits im Fall $c > \sigma^2/a$ stabil. Wir nehmen nun an, daß die Ungleichung (II,88b) erfüllt ist.

Setzt man $r_{bb}(\tau)$ nach Gleichung (II,88a) in die Beziehung (II,86b) ein, so erhält man nach einiger Rechnung

$$h_M(t, \tau) = e^{-\frac{a^2}{2}} e^{-(t-\tau)(c - \frac{a^2}{a})} e^{\frac{a^2}{2} e^{-a(t-\tau)}} \quad f.t. \geq \tau \quad (\text{II,89})$$

Man erkennt sofort, daß $h_M(t, \tau)$ die Impulsantwort eines stabilen Systems ist, wenn nur die Bedingung $c > \sigma^2/a$ erfüllt ist.

Bild 5 zeigt eine Schaltung, bei der der Zusammenhang zwischen dem Strom $y(t)$ und der Spannung $x(t)$ gerade durch die Diffe-

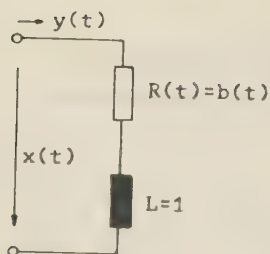


Bild 5

Um eine Mittelwertschaltung zu finden, entwickelt man sinnvoll den letzten Faktor der Gleichung (II,89) in eine Taylorreihe und erhält

$$h_M(t, \tau) = \sum_{v=0}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{\alpha^2} \cdot \frac{[\frac{\sigma^2}{\alpha^2}]^v}{v!}} \cdot e^{-(t-\tau)(\alpha + c - \frac{\sigma^2}{\alpha^2})}, \quad t \geq \tau. \quad (\text{II},90)$$

Im Falle der Stabilität unseres Systems, d.h. bei Gültigkeit der Gleichung (II,88b), konvergiert die Reihe jedenfalls absolut und sogar gleichmäßig für alle Werte $(t-\tau) \geq 0$.

Die Reihenglieder lassen sich nämlich durch die Majorante

$$e^{-\frac{\sigma^2}{\alpha^2}} \cdot \frac{[\frac{\sigma^2}{\alpha^2}]^v}{v!}$$

abschätzen. Die sich so ergebende Majorantenreihe konvergiert absolut und hat den Wert 1.

Nun wird die zum Mittelwertsystem gehörende Übertragungsfunktion

$$H_M(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_M(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{II},91)$$

berechnet, und für $h_M(t)$ der durch Gleichung (II,90) gegebene Ausdruck eingesetzt. Man erhält dann

$$H_M(i\omega) = \sum_{v=0}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{\alpha^2}} \cdot \frac{[\frac{\sigma^2}{\alpha^2}]^v}{v!} \cdot \frac{1}{(\alpha + c - \frac{\sigma^2}{\alpha^2}) + i\omega}. \quad (\text{II},92)$$

Die zur Bestimmung der Übertragungsfunktion vorgenommene Vertauschung der Reihenfolge Integration, Summation ist wegen der genannten Konvergenzeigenschaften der Reihe für $h_M(t)$ gestattet. Man erkennt unmittelbar, daß auch die Reihe für $H_M(i\omega)$ nach

Gleichung (II,92) für alle Werte ω absolut und gleichmäßig konvergiert.

Die Reihendarstellung für $H_M(i\omega)$ gestattet es, eine Schaltung des Mittelwertsystems anzugeben. Bild 6 zeigt eine Schaltung mit den geforderten Eigenschaften.

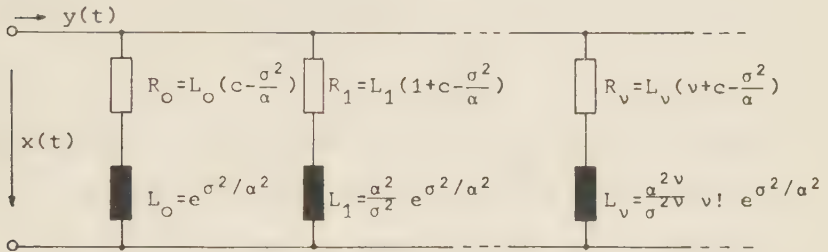


Bild 6

Man kann die Schaltung nach Bild 5 durch die nach Bild 6 ersetzen, wenn der Erwartungswert $E[y(t)] = y_M(t)$ zur Lösung eines vorliegenden Problems ausreicht. Voraussetzung ist allerdings, daß die zugelassenen Eingangssignale $x(t)$ unabhängig von der stochastischen Parameterfunktion $b(t)$ sind.

Bei der Betrachtungsweise im Frequenzbereich wird der "stochastische Leitwert" der Schaltung nach Bild 5 durch den festen mittleren Leitwert der Schaltung nach Bild 6 ersetzt.

Eine Approximation durch eine Schaltung mit endlich vielen Elementen ist im Frequenzbereich einfach durchführbar.

Folgende Frage ist besonders interessant. Lassen sich die freien Parameter σ^2 und α so ändern, daß die Schaltung nach Bild 6 identisch mit der nach Bild 5 ist, wenn dort der variable Widerstand durch seinen festen Mittelwert ersetzt wird. Anders ausgedrückt, gibt es einen normalverteilten Prozess derart, daß in der Differentialgleichung $y' + b(t)y = x$ $b(t)$ und $y(t)$ unkorreliert sind. In diesem Falle würde man nämlich die Differentialgleichung

$$y_M'(t) + E[b(t)]y_M(t) = E[x(t)]$$

für das Mittelwertsystem erhalten. Diese Differentialgleichung hat gerade die gesuchte Lösung.

Die Frage läßt sich in zweifacher Hinsicht bejahen.

1. Lösung: Aus der Schaltung nach Bild 6 erkennt man, daß $\sigma^2=0$ zu der gewünschten Form führt. Dies ist allerdings ein trivialer Fall. Ist $\sigma^2=0$, so ist $b(t)$ keine stochastische Funktion mehr. Mit der Wahrscheinlichkeit 1 gilt nämlich $b(t)=c$.
2. Lösung: Setzt man $k=\sigma^2/a$ und wählt $0 < k < c/4$, damit die Stabilität gesichert ist, so führt der Grenzübergang $a \rightarrow \infty$ zu der gewünschten Schaltung. In diesem Fall hat die Korrelationsfunktion des stochastischen Prozesses $b(t)=c$ die Form

$$r_{bb}(\tau) = \lim_{a \rightarrow \infty} k a e^{-a |\tau|}.$$

Transformiert man $r_{bb}(\tau)$ in den Frequenzbereich, so erhält man

$$s(\omega) = \lim_{a \rightarrow \infty} 2k \frac{a}{a + i\omega} = 2k$$

und findet

$$r_{bb}(\tau) = 2k\delta(\tau).$$

Bei einer Autokorrelationsfunktion dieser Form spricht man von normalverteiltem weißem Rauschen.

Dieses, hier durch einen Grenzübergang gewonnene, Ergebnis ist aus der Literatur bekannt und gilt auch bei Differentialgleichungen höherer Ordnung [1].

II.5.3.2 Mittelwertsysteme zur Differentialgleichung $y' + b(t)y = b(t)x$

II.5.3.2.1 Die geschlossene Darstellung der Impulsantwort. Wird das System durch die Differentialgleichung

$$y'(t) + b(t)y(t) = b(t)x(t) \quad (\text{II}, 93a)$$

beschrieben, und sind die Stabilitätskriterien $\|b^2(t)\| < K < \infty$ und $c > 2s(0)$ erfüllt, so hat die Impulsantwort die Form

$$h(t, \tau) = b(\tau) e^{-\int_{\tau}^t b(u) du} \quad (\text{II}, 93b)$$

Bei der im Bild 7 gezeigten einfachen Schaltung entspricht der Zusammenhang zwischen den Spannungen $x(t)$ und $y(t)$ gerade unserer Differentialgleichung.

Die Berechnung der mittleren Impulsantwort kann so erfolgen, daß zuerst die 2. Wahrscheinlichkeitsdichte $w_2(b, z)$ der Zufallsvariablen $b(\tau)$ und $\int_{\tau}^t b(u) du$ berechnet

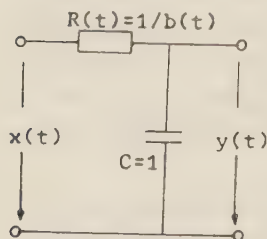


Bild 7

wird. Man findet dann

$$h_M(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b e^{-z} w_2(b, z) db dz. \quad (II, 94)$$

Bei normalverteiltem $b(t)$ ist die Dichtefunktion $w_2(b, z)$ durch Gleichung (II, 23) gegeben. Die Erwartungswerte von b und z sowie die Elemente der Streuungsmatrix $\underline{B}$ lauten:

$$E[b(\tau)] = a_1 = c; E[z] = a_2 = c(t - \tau); b_{11} = E[(b(\tau) - c)^2] = r_{bb}(0);$$

$$b_{12} = b_{21} = E[(b(\tau) - c)(z - a_2)] = \int_0^{t-\tau} r_{bb}(u) du;$$

$$b_{22} = E[(z - a_2)^2] = \int_0^{t-\tau} \int_0^{t-\tau} r_{bb}(u-v) dudv.$$

Die Auswertung des Integrals nach Gleichung (II, 94) lässt sich umgehen. Ausgehend von

$$h_O(t, \tau) = e^{-\int_{\tau}^t b(u) du}$$

bildet man

$$\frac{\partial h_O(t, \tau)}{\partial \tau} = b(\tau) e^{-\int_{\tau}^t b(u) du} \quad (II, 95a)$$

und stellt fest, daß $h(t, \tau)$ die partielle Ableitung von $h_O(t, \tau)$ nach τ ist.

Dann gilt die Beziehung

$$E\left[\frac{\partial h_O(t, \tau)}{\partial \tau}\right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} E\left[\frac{h_O(t, \tau + \epsilon) - h_O(t, \tau)}{\epsilon}\right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{E[h_O(t, \tau + \epsilon)] - E[h_O(t, \tau)]}{\epsilon}. \quad (II, 95b)$$

Der Erwartungswert $E[h_O(t, \tau)]$ ist aber im vorigen Abschnitt, Gleichung (II, 86b), angegeben worden. Differenziert man diesen Ausdruck nach τ , so erhält man

$$h_M(t, \tau) = \left[c - \int_0^{t-\tau} r_{bb}(u) du\right] e^{-c(t-\tau)} e^{0,5 \int_0^{t-\tau} \int_0^{t-\tau} r_{bb}(u-v) dudv}. \quad (II, 96)$$

II.5.3.2.2 Die Reihendarstellung der Impulsantwort. Neben der direkten Berechnung von $h_M(t, \tau)$ nach der Gleichung (II, 96), besteht die Möglichkeit $h(t, \tau)$ bei $t = \tau$ als Taylorreihe zu entwickeln, und $h_M(t, \tau)$ durch Mittelung der Reihenglieder zu gewinnen.

Die Reihendarstellung setzt allerdings voraus, daß die Korrelationsfunktion $r_{bb}(\tau)$ analytisch ist. Bei der Darstellung nach

Gleichung (II,96) ist nur Stetigkeit gefordert. Im vorliegenden Fall wird jedenfalls die direkte Berechnung von $h_M(t, \tau)$ einfacher sein. In anderen Fällen kann es sinnvoll sein, die Reihendarstellung zu verwenden. Ein solcher Fall kann dann vorliegen, wenn die Parameterfunktion $b(t)$ nicht normalverteilt ist. Die Bestimmung der Dichtefunktionen $w(z)$ und $w_2(b, z)$ ist in solchen Fällen meist sehr schwierig.

Die geschlossene Darstellung von $h(t, \tau)$ ist normalerweise schon bei Systemen mit Differentialgleichungen ab 2. Ordnung nicht mehr möglich. In Sonderfällen, die später besprochen werden, lassen sich geschlossene Darstellungen im Prinzip bis zu Differentialgleichungen 4. Ordnung finden.

Im folgenden wird gezeigt, wie man aus der Reihendarstellung für $h(t, \tau)$ die Impulsantwort $h_M(t, \tau)$ bestimmen kann.

Mit den Abkürzungen, wie sie im Abschnitt I.4.2 verwendet wurden, erhält man aus Gleichung (I,54) die Rekursionsformel

$$\bar{h}_0^{(1+\mu)}(\tau, \tau) = - \sum_{\nu=1}^{1+\mu} \bar{h}_0^{(1+\mu-\nu)}(\tau, \tau) \left[\begin{matrix} \mu \\ \nu-1 \end{matrix} \right] b^{(\nu-1)}(\tau), \quad \mu=0, 1, \dots \quad (\text{II}, 97)$$

$$\bar{h}_0^{(0)}(\tau, \tau) = 1.$$

Die Reihe für $h(t, \tau)$ hat die Form

$$h(t, \tau) = s(t-\tau) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} b(\tau) \bar{h}_0^{(i)}(\tau, \tau) \frac{(t-\tau)^i}{i!}. \quad (\text{II}, 98)$$

Im Abschnitt I.4.5 wurde beschrieben, auf welche Weise formelmäßige Ausdrücke für die Koeffizienten obiger Reihendarstellung mit Hilfe eines Digitalrechners bestimmt werden können.

Zur Auswertung im vorliegenden Fall standen Gleichungen für die ersten 20 Koeffizienten zur Verfügung. Eine Näherung von $h(t, \tau)$ mit einigen wenigen Gliedern lautet:

$$h(t, \tau) = b(\tau) - b^2(\tau)(t-\tau) + [b^3(\tau) - b(\tau)b'(\tau)] \frac{(t-\tau)^2}{2!} -$$

$$[b^4(\tau) - 3b^2(\tau)b'(\tau) + b(\tau)b''(\tau)] \frac{(t-\tau)^3}{3!} + \dots \quad t \geq \tau. \quad (\text{II}, 99)$$

Ersetzt man in dieser Gleichung die Koeffizienten durch ihre Erwartungswerte, so erhält man eine Reihendarstellung für die Impulsantwort des Mittelwertsystems:

$$h_M(t, \tau) = s(t-\tau) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} E[b(\tau) \bar{h}_0^{(i)}(\tau, \tau)] \frac{(t-\tau)^i}{i!}. \quad (\text{II}, 100)$$

Diese Reihe konvergiert natürlich, die Voraussetzung über die Stabilität des Systems setzt die Existenz der Norm $\|h(t, \tau)\|$ und somit erst recht die des Erwartungswertes voraus. Die Darstellung als Reihe ist ebenfalls zulässig, da entsprechende Forderungen an die Korrelationsfunktion $r_{bb}(\tau)$ gestellt wurden.

Die in der Gleichung (II,100) auftretenden Erwartungswerte sind nicht von τ abhängig, da ein stationärer Prozess $b(t)$ vorliegt. Die Impulsantwort des Mittelwertsystems ist demnach eine Funktion der Differenz $t-\tau$. Zur Bestimmung der in der Gleichung (II,100) auftretenden Erwartungswerte geht man wie folgt vor. Wir wollen den Erwartungswert des Produktes mit n Faktoren

$$P = [b^{(\nu)}(\tau)]^{\nu_1} [b^{(\nu-1)}(\tau)]^{\nu_2} \dots [b'(\tau)]^{\nu_n} [b(\tau)]^{\nu_{n+1}}$$

mit $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n = n; \nu = 0, 1, \dots$ und $n = \mu + 1$

berechnen. Zu diesem Zweck definieren wir die Hilfsfunktion

$$H_n(\tau, t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n b(\tau + t_i) \quad (\text{II,101})$$

und bilden den Erwartungswert

$$E[H_n(\tau, t_1, \dots, t_n)] = E\left\{\prod_{i=1}^n b(\tau + t_i)\right\}.$$

Nun bildet man partielle Ableitungen folgender Art

$$\frac{\partial^{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_{n+1}}}{\partial t_1^{\nu_1} \dots \partial t_{\nu_1}^{\nu_1} \dots \partial t_{\nu_1 + \dots + \nu_{n-2} + 1}^{\nu_{n-1}} \dots \partial t_{\nu_1 + \dots + \nu_{n-1}}^{\nu_n}} [E[H_n(\tau, t_1, \dots, t_n)]] \quad (\text{II,102})$$

und stellt fest, daß man für $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0$ gerade den gewünschten Erwartungswert $E[P]$ erhält.

Die letzte Beziehung sieht etwas kompliziert aus, ein einfaches Beispiel soll größere Klarheit schaffen.

Gesucht wird der Erwartungswert $E[b'^2(\tau)b(\tau)]$. Die Hilfsfunktion lautet hier

$$H_3(\tau, t_1, t_2, t_3) = b(\tau + t_1)b(\tau + t_2)b(\tau + t_3).$$

Der Erwartungswert dieser Funktion ist partiell nach t_1 und t_2 abzuleiten.

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \{E[H_3(\tau, t_1, t_2, t_3)]\} = \frac{\partial}{\partial t_2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{E[H_3(\tau, t_1 + \epsilon, t_2, t_3)] - E[H_3(\tau, t_1, t_2, t_3)]}{\epsilon} =$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} E \left[\frac{H_3(\tau, t_1 + \epsilon, t_2, t_3) - H_3(\tau, t_1, t_2, t_3)}{\epsilon} \right] =$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2} E[b'(\tau + t_1)b(\tau + t_2)b(\tau + t_3)] = E[b'(\tau + t_1)b'(\tau + t_2)b(\tau + t_3)].$$

Für $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ erhält man den gewünschten Erwartungswert.

Gleichung (II,102) gibt an, auf welche Weise die gesuchten Erwartungswerte $E[P]$ berechnet werden können, wenn die Erwartungswerte der zugehörigen Hilfsfunktionen bekannt sind. Es sei bemerkt, daß Gleichung (II,102) natürlich auch für nicht normalverteilte Funktionen gültig ist, wenn nur die Ableitungen der Erwartungswerte in der gewünschten Art existieren.

Wir kommen nun zur Berechnung von $E[H_n(\tau, t_1, \dots, t_n)]$, $n=1, 2, \dots$ und setzen voraus, daß $b(t)$ stationär und normalverteilt ist.

Zur Berechnung des Erwartungswertes steht die Gleichung (II,20b) zur Verfügung, in die die charakteristische Funktion der Normalverteilung nach Gleichung (II,24) einzusetzen ist. Die Auswertung führt dann auf die bekannte Beziehung (vgl. z.B. [14]):

$$E[(b(\tau + t_1) - c) \dots (b(\tau + t_{2n}) - c)] = \sum r_{bb}(t_i - t_j) \dots r_{bb}(t_k - t_l) \quad (II,103a)$$

(die Summe ist über alle $(2n)!/2^n n!$ Produkte mit n Faktoren zu erstrecken)

$$E[(b(\tau + t_1) - c) \dots (b(\tau + t_{2n-1}) - c)] = 0. \quad (II,103b)$$

Zur Berechnung der gesuchten Erwartungswerte setzt man

$$\bar{b}(\tau + t_v) = b(\tau + t_v) - c, \quad v=1, 2, \dots \quad (II,104a)$$

und erhält unter Berücksichtigung von Gleichung (II,103b)

$$E[b(\tau + t_1) \dots b(\tau + t_m)] = c^m + c^{m-2} \sum_{\binom{m}{2} \text{ Produkte}} E[\bar{b}(\tau + t_i) \bar{b}(\tau + t_j)] +$$

$$c^{m-4} \sum_{\binom{m}{4} \text{ Produkte}} E[\bar{b}(\tau + t_i) \bar{b}(\tau + t_j) \bar{b}(\tau + t_k) \bar{b}(\tau + t_l)] + \dots \quad (II,104b)$$

Die in der Gleichung (II,104b) auftretenden Erwartungswerte sind unschwer mit Hilfe der Gleichung (II,103a) zu berechnen.

$E[H_n(\tau, t_1, \dots, t_n)]$ ist nur von dem Mittelwert c und der Korrelationsfunktion $r_{bb}(\tau)$ abhängig. Nach der Voraussetzung, daß die Korrelationsfunktion analytisch sein soll, ist die Existenz von $E[P]$ gewährleistet.

Um das Verfahren zu veranschaulichen, soll die Berechnung von $E[P]$ am einfachen Beispiel $P=b'^2(\tau)b(\tau)$ durchgeführt werden. In diesem Falle wird nach Gleichung (II,104b)

$$E[H_3(\tau, t_1, t_2, t_3)] = E[b(\tau+t_1)b(\tau+t_2)b(\tau+t_3)] = c^3 + cE[\bar{b}(t_1)\bar{b}(t_2)] + cE[\bar{b}(t_1)\bar{b}(t_3)] + cE[\bar{b}(t_2)\bar{b}(t_3)] .$$

Die auftretenden Erwartungswerte werden nach der Gleichung (II,103a) berechnet, es wird

$$E[H_3(\tau, t_1, t_2, t_3)] = c^3 + cr_{bb}(t_1-t_2) + cr_{bb}(t_1-t_3) + cr_{bb}(t_2-t_3) .$$

Schließlich erhält man durch Verwendung der Beziehung (II,102) den gesuchten Erwartungswert

$$E[b'(\tau)b'(\tau)b(\tau)] = -cr'_{bb}(0) .$$

Besteht P aus einer größeren Anzahl von Faktoren, so ist die Berechnung von $E[P]$ außerordentlich mühsam. Daher wurde ein Algolprogramm zur Berechnung der gesuchten Erwartungswerte geschrieben. Als Eingabedaten werden zur Kennzeichnung der Struktur von P die im Abschnitt I.4.5 beschriebenen Kennziffern verwendet. Weitere Eingabedaten sind der Mittelwert c und die Werte der Korrelationsfunktion mit Ableitungen bei $\tau=0$. Das Programm berechnet $E[P]$, wenn P aus weniger als 22 Faktoren besteht, und die höchste auftretende Ableitung die Ordnung 22 nicht überschreitet.

II.5.3.2.3 Ein Beispiel. $b(t)$ in Gleichung (II,93a) sei normalverteilt, die Korrelationsfunktion soll die Form

$$r_{bb}(\tau) = \sigma^2 e^{-a\tau^2}, \quad a > 0$$

haben. Eine Reihendarstellung für $h_M(t)$ soll angegeben werden, wenn $\sigma^2=0,04$; $a=0,1$; $c=1$ ist. Die Stabilitätsbedingung

$$c > 2s(0) = 2\sigma^2 \sqrt{\pi/a} = 0,224$$

ist erfüllt.

Insgesamt wurden 20 Glieder der Reihe berechnet, mit den ersten Gliedern lautet für $t \geq 0$:

$$h_M(t) = 1 - 1,04 \frac{t}{1!} + 1,12 \frac{t^2}{2!} - 1,2368 \frac{t^3}{3!} + 1,384 \frac{t^4}{4!} - 1,55296 \frac{t^5}{5!} + 1,73472 \frac{t^6}{6!} - + \dots$$

$h_M(t)$ ist auf Bild 8 dargestellt und weicht nur wenig von der Funktion $s(t)e^{-t}$ ab. Mit den berechneten 20 Gliedern läßt sich $h_M(t)$ für $t \leq 3$ mit weniger als 1% Fehler berechnen.

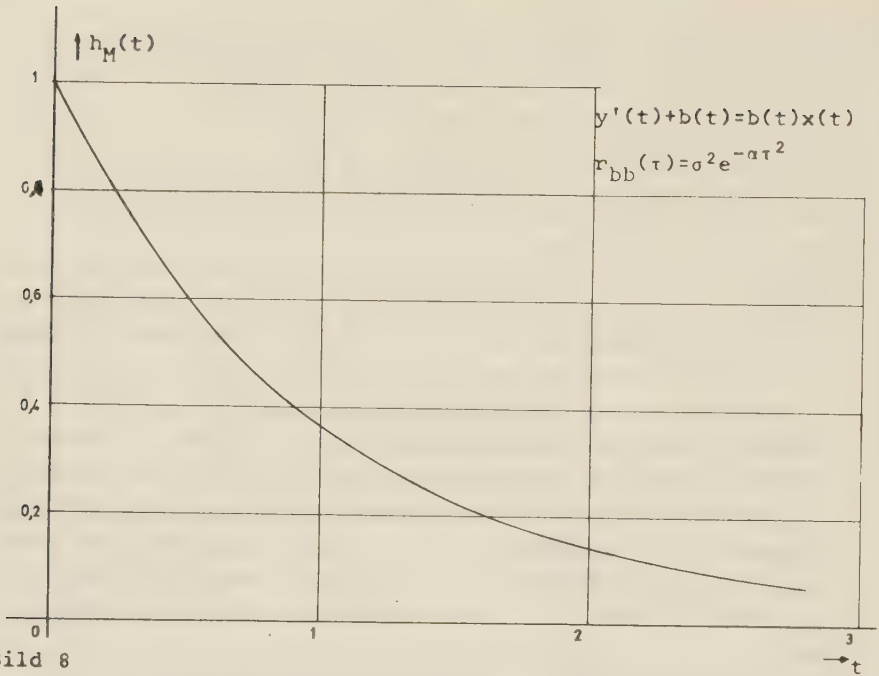


Bild 8

II.5.4 Ein hinreichendes Stabilitätskriterium bei nicht normalverteiltem Parameter $b(t)$

Das im Abschnitt II.5.2 abgeleitete Stabilitätskriterium ist nur bei normalverteiltem $b(t)$ verwendbar. Hier soll ein hinreichendes Stabilitätskriterium angegeben werden, das auch bei anders verteilten Parameterfunktionen angewendet werden kann. Wir gehen von den im Abschnitt II.5.1 angegebenen Voraussetzungen aus und berechnen eine Abschätzung für $S(t, \tau)$ nach Gleichung (II, 77).

Ausgehend von dem System mit der Differentialgleichung

$$y' + 4b(t)y = x,$$

läßt sich dessen Impulsantwort nach Gleichung (I, 85) folgendermaßen darstellen:

$$h_0(t, \tau) = R_0\left[t, (n-1)\frac{t}{n}\right] R_0\left[(n-1)\frac{t}{n}, (n-2)\frac{t}{n}\right] \dots R_0\left(\frac{t}{n}, \tau\right), t \geq \tau.$$

(II, 105a)

Dabei hat $R_0(t, \tau)$ die Form

$$R_0(t, \tau) = 1 - 4b(\tau)(t-\tau) + [16b^2(\tau) - 16b(\tau)b'(\tau)] \frac{(t-\tau)^2}{2!} + \dots$$

(II, 105b)

Wählt man die Zahl n hinreichend groß und weiterhin $\tau=0$, so werden die Faktoren in der Gleichung (II,105a) genügend genau durch die zwei ersten Reihenglieder approximiert, man erhält:

$$h_0(t,0) \approx [1-4b((n-1)\frac{t}{n}) \cdot \frac{t}{n}] \dots [1-4b(0) \cdot \frac{t}{n}] \quad (\text{II,105c})$$

Der Betrag von $E[h_0(t,0)]$ läßt sich sehr leicht abschätzen, er nimmt nämlich dann seinen höchsten Wert an, wenn alle Faktoren in der Gleichung (II,105c) identisch sind. Daher gilt

$$|E[h_0(t,\tau)]| = |E[h_0(t-\tau)]| = |E[h_0(t)]| \leq |E[(1-4b(0)\frac{t}{n})^n]| \quad (\text{II,106a})$$

Im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ wird

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(1-4b(0)\frac{t}{n})^n] = e^{-4b(0)t},$$

so daß sich die Ungleichung

$$|E[h_0(t,\tau)]| \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4b(\tau)(t-\tau)} w[b(\tau)] db(\tau) \right| \quad (\text{II,106b})$$

ergibt. $w[b(\tau)]$ ist die 1. Wahrscheinlichkeitsdichte des stochastischen Prozesses $b(t)$.

Hat diese Dichtefunktion die Eigenschaft, daß für alle $b(\tau) < a$ und $a > 0$ die Beziehung $w[b(\tau)] \equiv 0$ gilt, so erhält man die Abschätzung:

$$|E[h_0(t,\tau)]| \leq e^{-4a(t-\tau)}$$

oder auch

$$S(t,\tau) \leq e^{-a(t-\tau)} \quad (\text{II,107})$$

Als Ergebnis wurde folgendes Stabilitätskriterium ermittelt.

Ein System ist sicher dann stabil, wenn die 1. Wahrscheinlichkeitsdichte die Bedingung $w[b(t)] \equiv 0$ für alle $0 < a < b(t)$ erfüllt. Außerdem muß die im Abschnitt II.5.1 angegebene Bedingung (II,78b) erfüllt sein.

Für Systeme mit normalverteiltem $b(t)$ macht das abgeleitete Kriterium keine Aussage, da die Bedingung für $b(t)$ nicht erfüllt ist.

II.6 Eingefrorene Systeme

II.6.1 Einführende Bemerkungen

Die Berechnung der Impulsantwort des Mittelwertsystems $h_M(t,\tau)$ aus der Reihendarstellung für $h(t,\tau)$ stößt bei größeren Werten $t-\tau$ auf erhebliche Schwierigkeiten. Diese entstehen dadurch, daß

die Zahl der notwendigen Reihenglieder mit wachsenden Werten $t-\tau$ sehr schnell ansteigt. Eine Darstellung der Impulsantwort nach Gleichung (I,85) ist zwar richtig, sie führt bei der Berechnung aber nicht auf einfache Weise zum Ziel, da die einzelnen Faktoren voneinander abhängig sind. Schließlich ist die Berechnung der Erwartungswerte der Reihenglieder nur bei solchen Parameterfunktionen einfach durchführbar, die ganze Potenzen normalverteilter stochastischer Funktionen sind.

Im allgemeinen ist die Berechnung der Impulsantwort des Mittelwertsystems für große Werte $t-\tau$ nur mit Hilfe großer und schneller digitaler Rechenanlagen möglich.

Eine relativ einfache Berechnung von $E[h(t,\tau)]$ sowie der Norm $\|h(t,\tau)\|$ ist bei einem speziellen stochastischen System möglich, das eingefrorenes System genannt werden soll. Besonders wichtig ist, daß bei dieser Systemklasse die Berechnung auch dann einfach durchführbar ist, wenn die Koeffizientenfunktionen der Differentialgleichungen nicht normalverteilt sind. Stabilitätsbedingungen für eingefrorene Systeme sind leicht anzugeben.

Schließlich läßt sich das eingefrorene System auf interessante Weise physikalisch interpretieren. Es gestattet nämlich den Einfluß von Bauelementeschwankungen auf die Übertragungseigenschaften von Netzwerken zu untersuchen.

II.6.2 Die Definition des eingefrorenen Systems

Wir setzen voraus, daß die Koeffizientenfunktionen $b_v(t)$, $v=0, \dots, (n-1)$ und $a_\mu(t)$, $\mu=0, \dots, m$ stationär sind und die im Abschnitt II.3.2 genannten Bedingungen erfüllen.

In diesem Fall läßt sich die Impulsantwort des stochastischen Systems formal als Reihe

$$h(t,\tau) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v(\tau) \frac{(t-\tau)^v}{v!}, t > \tau \quad (\text{II},108)$$

darstellen. Die Koeffizienten $c_v(\tau)$, $v=0,1,\dots$ sind abhängig von den Funktionen $b_v(\tau)$, $a_\mu(\tau)$ und deren Ableitungen. Ändert man die statistischen Eigenschaften der Parameterfunktionen derart ab, daß die Korrelationsfunktionen $r_{b_v b_v}(\tau)$, $r_{a_\mu a_\mu}(\tau)$ durch die Funktionen $r_{b_v b_v}(\tau/k)$, $r_{a_\mu a_\mu}(\tau/k)$ ersetzt werden, so

erhält man im Grenzfall $k \rightarrow \infty$ das eingefrorene System.

Um den Einfluß einer derartigen Veränderung der Korrelationsfunktionen auf die statistischen Eigenschaften zu untersuchen, betrachten wir ein stochastisches Signal $x(t)$ mit der analytischen Korrelationsfunktion $r(\tau)$.

Die Norm von $x(t)$ beträgt $\|x(t)\| = [r(0)]^{1/2}$, die von $x^{(n)}(t)$ $\|x^{(n)}(t)\| = [(-1)^n r^{(2n)}(0)]^{1/2}$, $n=1,2,\dots$. $\bar{x}(t)$ sei ein stochastisches Signal, das aus $x(t)$ entsteht, wenn die Korrelationsfunktion $r(\tau)$ durch $r(\tau/k)$, $k>1$ ersetzt wird. Die Norm von $\bar{x}(t)$ beträgt $\|\bar{x}(t)\| = \|x(t)\|$, die von $\bar{x}^{(n)}(t)$ beträgt

$$\|\bar{x}^{(n)}(t)\| = \frac{1}{k^n} \|x^{(n)}(t)\|.$$

Im Grenzfall $k \rightarrow \infty$ sind alle stochastischen Funktionen $\bar{x}^{(n)}(t)$ für $n>1$ äquivalent Null, da ihre Normen verschwinden. Die Änderung der Korrelationsfunktion wirkt sich nicht auf die 1. Wahrscheinlichkeitsdichte, wohl aber auf die höheren Dichtefunktionen aus.

Die Impulsantwort $h_E(t, \tau)$ des eingefrorenen Systems findet man somit, wenn in der Reihe nach Gleichung (II, 108) die Koeffizienten $c_v(\tau)$ derart geändert werden, daß alle Summanden wegfallen, die Ableitungen der Koeffizientenfunktionen als Faktoren enthalten. Die Reihe für die Impulsantwort des eingefrorenen Systems wird auf diese Weise wesentlich einfacher als im allgemeinen Fall. So besitzt beispielsweise der Koeffizient $c_{20}(\tau)$ bei Systemen mit der Differentialgleichung $y' + b(t)y = x$ im allgemeinen Fall 627 Summanden, beim eingefrorenen System aber nur noch einen einzigen, nämlich $c_{20}(\tau) = b^{20}(\tau)$.

Man stellt fest, daß die Reihe für $h_E(t, \tau)$ formal mit einer Reihe übereinstimmt, die sich für ein System mit festen Parameterwerten ergeben würde. Dies erkennt man auch auf die folgende Art. Wir entwickeln die Koeffizientenfunktionen $b_v(t)$, $a_\mu(t)$ für alle v, μ an einer beliebigen Stelle $t=\lambda$ in Taylorreihen. Die Korrelationsfunktionen der $a_\mu(t)$, $\mu=0, \dots, m$ werden zu diesem Zweck durch analytische Funktionen so approximiert, daß bei $\tau=0$ in mindestens μ Ableitungen Übereinstimmung besteht. Ändert man nun die Korrelationsfunktionen in der vorne beschriebenen Art ab, so erhält man

$$b_v(t) = b_v(\lambda), \quad a_\mu(t) = a_\mu(\lambda) \quad \text{für } v=0, \dots, n-1; \mu=0, \dots, m.$$

Damit lautet die Differentialgleichung des eingefrorenen

Systems:

$$y^{(n)}(t) + b_{n-1}(\lambda)y^{(n-1)}(t) + \dots + b_0(\lambda)y(t) =$$

$$a_m(\lambda)x^{(m)}(t) + \dots + a_0(\lambda)x(t) . \quad (\text{II}, 109)$$

Es handelt sich hier um eine Differentialgleichung mit Koeffizienten, die nicht zeitabhängig sind. Die Lösung hat somit die gleiche Form, wie bei Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Insbesondere lautet die Übertragungsfunktion des eingefrorenen Systems, wenn Stabilität vorausgesetzt wird:

$$H_E(i\omega) = \frac{a_m(\lambda)p^m + \dots + a_1(\lambda)p + a_0(\lambda)}{b_n(\lambda)p^n + \dots + b_1(\lambda)p + b_0(\lambda)} . \quad (\text{II}, 110)$$

Es ist zu beachten, daß die $b_v(\lambda), a_v(\lambda)$ in dieser Gleichung zufällige Variable sind, man kann ihnen also keinesfalls irgendwelche festen Werte zuordnen.

Ist das System stabil, so findet man die Impulsantwort des eingefrorenen Systems durch Fourierrücktransformation von $H_E(i\omega)$. Diese Rücktransformation wird sich aber im allgemeinen nicht durchführen lassen, da zu diesem Zweck die Nullstellen des Nennerpolynoms in Gleichung (II, 110) bekannt sein müssen. Diese lassen sich bekanntlich nur bis $n=4$ in allgemeiner Weise berechnen. In praktischen Fällen ist schon für $n>2$ die Rücktransformation zu umständlich.

Zur unmittelbaren Bestimmung der Impulsantwort steht die Taylorreihe (II, 108) zur Verfügung. Es wurde ein Algolprogramm erstellt, das bis zu 98 Reihenglieder in Form von Kennziffern für $n \leq 10$ berechnet.

Die mittlere Impulsantwort läßt sich ebenfalls auf zwei Arten ermitteln. Die Berechnung von $h_{EM}(t, \tau)$ aus der Reihendarstellung ist hier vergleichsweise einfach, da die Reihenglieder aus relativ wenig Summanden bestehen.

Daneben läßt sich $h_{EM}(t, \tau)$ aus dem Erwartungswert $E[H_E(i\omega)]$ durch Fourierrücktransformation ermitteln, es ist dann:

$$h_{EM}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E[H_E(i\omega)] e^{-i\omega t} d\omega . \quad (\text{II}, 111)$$

Voraussetzung ist dabei die Stabilität des Systems, da sonst dieser Zusammenhang nicht besteht.

Der Erwartungswert $E[H_E(i\omega)]$ wird entweder durch die Gleichung

$$E[H_E(i\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} H_E(i\omega) w[H_E(i\omega)] dH_E(i\omega) \quad (\text{II},112a)$$

oder durch die Beziehung

$$E[H_E(i\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} H_E(i\omega) w_{n+m+1}[b_0, \dots, b_{n-1}, a_0, \dots, a_m] \\ db_0 \dots db_{n-1}, da_0 \dots da_m \quad (\text{II},112b)$$

berechnet.

II.6.3 Stabilitätskriterien für eingefrorene Systeme

Jede Realisierung des stochastischen Prozesses $h_E(t, \tau)$ läßt sich in der Form

$$h_E(t, \tau) = e^{-a_1(t-\tau)} \cdot [C_{11} + C_{12}(t-\tau) + \dots + C_{1v_1}(t-\tau)^{v_1-1}] +$$

$$e^{-a_\mu(t-\tau)} \cdot [C_{\mu 1} + C_{\mu 2}(t-\tau) + \dots + C_{\mu v_\mu}(t-\tau)^{v_\mu-1}] +$$

$$k \cdot \delta(t-\tau) \text{ mit } v_1 + v_2 + \dots + v_\mu = n \quad (\text{II},113)$$

schreiben. Im Falle $m < n$ ist stets $k=0$, sonst $k=a_n(\lambda)$. Die Schreibweise nach Gleichung (II,113) ist leicht einzusehen. Im Einschaltzeitpunkt $t=\tau$ liegen irgendwelche Werte $\bar{b}_v, \bar{a}_\mu$ ($v=0, \dots, n-1; \mu=0, \dots, m$) vor, die sich nicht mehr mit der Zeit ändern. Es lassen sich die Nullstellen des Polynoms

$$p^n + \bar{b}_{n-1} p^{n-1} + \dots + \bar{b}_0 = 0$$

berechnen, die mit $a_1, \dots, a_\mu$ bezeichnet werden und die Vielfachheiten $v_1, \dots, v_\mu$ besitzen. Diese Nullstellen ergeben zusammen mit den Anfangsbedingungen eine Form nach Gleichung (II,113). Nun wird verlangt, daß mit einer Wahrscheinlichkeit, die größer als Null ist, die Koeffizienten $b_v(\lambda), v=0, \dots, n-1$ nur in solchen Wertebereichen liegen dürfen, die Nullstellen mit negativen Realteilen zur Folge haben. Dies wird genau dadurch gewährleistet, daß alle Wahrscheinlichkeitsdichten $w(b_v)$ in den Bereichen identisch verschwinden, in denen für das Polynom

$$p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0 = 0$$

das Hurwitzkriterium nicht erfüllt ist. An die Wahrscheinlichkeitsdichten der Zufallsvariablen $a_\nu(\lambda)$, $\nu=0, \dots, m$ wird die Bedingung gestellt, daß sie oberhalb beliebiger, aber endlicher Werte $|a_\nu|$ identisch verschwinden sollen.

Es sei α_1 gerade diejenige Nullstelle mit dem größtmöglichen (negativen) Realteil. Dann findet man für $(t-\tau) > 1$ und alle möglichen Realisierungen von $h_E(t, \tau)$ die Abschätzung

$$|h_E(t, \tau)| \leq e^{-\gamma(t-\tau)} \cdot (t-\tau)^n \cdot C; C = n \cdot \max_{\nu, v} [C_{\nu v}]; \gamma = \operatorname{Re}[\alpha_1]. \quad (\text{II}, 114)$$

Der Erwartungswert $E[h_E(t, \tau)]$ kann niemals größer als die größtmögliche Realisierung werden, daher ist das zugehörnde Mittelwertsystem nach den gemachten Voraussetzungen stabil.

Ebenso besteht Stabilität schlechthin, da Gleichung (II, 114) auch eine Abschätzung für die Norm $\|h_E(t, \tau)\|$ darstellt.

Als Ergebnis erhält man folgende Aussage. Das eingefrorene System ist stabil, wenn die Wahrscheinlichkeitsdichten $w(b_\nu)$, $\nu=0, \dots, n-1$ überall dort identisch verschwinden, wo eine Auswahl von Werten b_ν zu Nullstellen der charakteristischen Gleichung mit positiven Realteilen führen kann. Die Wahrscheinlichkeitsdichten $w(a_\nu)$, $\nu=0, \dots, m$ sollen für $|a_\nu| > K$, $0 < K < \infty$ identisch verschwinden.

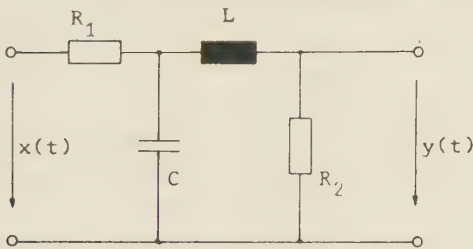
Umgekehrt gilt folgende Aussage. Ist die Wahrscheinlichkeitsdichte von mindestens einem Koeffizienten b_ν in einem vollen Bereich um einen Punkt $\bar{b}_\nu$, der zu Nullstellen mit positiven Realteilen führt, nichtverschwindend, so ist das System instabil. Das ist leicht einzusehen, ist etwa γ der kleinstmögliche positive Realteil, so existieren mit endlicher Wahrscheinlichkeit Realisierungen von $h_E(t, \tau)$, die betragsmäßig stets größere Werte als $Ce^{\gamma(t-\tau)}$ annehmen.

II.6.4 Beispiele für eingefrorene Systeme

II.6.4.1 Normalverteilte Parameter. Aus den im letzten Abschnitt angegebenen Stabilitätskriterien erkennt man sofort, daß eingefrorene Systeme mit normalverteilten Parametern instabil sind. Trotzdem läßt sich $h_{EM}(t, \tau)$ oder $\|h_E(t, \tau)\|$ formal aus der Reihendarstellung bestimmen. Die berechneten Funktionen lassen sich gegebenenfalls bei kleinen Werten $t-\tau$ als Näherungs-

Lösungen für stabile Systeme mit normalverteilten Parametern verwenden. Die Approximation wird umso besser sein, je "flacher" die Korrelationsfunktionen der Parameter des betrachteten Systems verlaufen.

II.6.4.2 Ein System mit einer Differentialgleichung 2. Ordnung



Wir gehen von der im Bild 9 dargestellten Schaltung aus und untersuchen folgendes Problem. Die Schaltung soll Temperaturschwankungen ausgesetzt sein, die im Verhältnis zu den beobachteten Zeitvorgängen sehr langsam verlaufen

Bild 9

sollen. Wir approximieren daher das System von Bild 9 durch das zugehörige eingefrorene System. Wir setzen weiterhin voraus, daß sich die Temperaturschwankungen nur auf die Widerstände R_1 und R_2 auswirken.

Sind R_{10} und R_{20} die Widerstände bei der mittleren Temperatur, so erhält man die Differentialgleichung

$$y''(t) + y'(t) \left[\frac{1}{R_1} + R_2 \right] + y(t) \left[1 + \frac{R_{20}}{R_{10}} \right] = x(t) \frac{R_{20}}{R_{10}}, \quad (\text{II}, 115)$$

wenn $L=C=1$ gesetzt wurde.

Gesucht wird die mittlere Impulsantwort des Systems nach Gleichung (II, 115) sowie die Streuung der Impulsantwort, wenn eine Gleichverteilung der Temperaturschwankungen und auch der Widerstände vorausgesetzt wird.

Mittlere Impulsantwort und Streuung sollen sowohl direkt, als auch durch die Reihendarstellung berechnet werden.

1. Die direkte Berechnung. Die Impulsantwort hat die Form

$$h(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}. \quad (\text{II}, 116)$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms p_1, p_2 lassen sich als Funktion von R_1, R_2 finden. Man findet dann

$$h_M(t) = \frac{1}{2\epsilon} \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} h(t) dr,$$

$$E[h^2(t)] = \frac{1}{2\epsilon} \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} h^2(t) dr ,$$

$$\sigma^2(t) = E[h^2(t)] - h_M^2(t) . \quad (II,117)$$

Dabei wurde $R_1=R_{10}r, R_2=R_{20}r$ mit $1-\epsilon \leq r \leq 1+\epsilon$ gesetzt.

Die notwendigen Integrationen sind numerisch mit Hilfe eines Digitalrechners bequem durchführbar.

2. Die Reihendarstellung. Zur Berechnung von $h_M(t)$ standen Kennziffern und Faktoren für 40 Reihenglieder bei einer Differentialgleichung 2. Ordnung zur Verfügung. Bei der Mittelwertbildung der Koeffizienten waren nur Mittelwerte der Art

$E[(1/(R_{10}r)+R_{20}r)^v], v=1,2,\dots$ zu berechnen. Die Bestimmung von $E[h^2(t)]$ ist etwas umständlicher. Man kann einmal so vorgehen, daß die Reihe für $h(t)$ ausquadriert und dann eine Mittelwertbildung vorgenommen wird. Im vorliegenden Fall wurde ein anderer Weg beschritten. Wird $h(t)$ nach Gleichung (II,116) quadriert, so erhält man

$$h^2(t) = C_1^2 e^{2p_1 t} + C_2^2 e^{2p_2 t} + 2C_1 C_2 e^{(p_1+p_2)t} . \quad (II,118)$$

Es zeigt sich, daß $h^2(t)$ somit als Impulsantwort eines neuen Systems mit einer Differentialgleichung 3. Ordnung aufgefaßt werden kann. Durch Rechnung stellt man fest, daß diese Differentialgleichung die Form

$$y'''(t) + y''(t)3b_1 + y'(t)(2b_1^2 + 4b_0) + y(t)4b_0 b_1 = x(t)2a_0^2 \quad (II,119)$$

mit $a_0=R_{20}/R_{10}, b_0=1+a_0, b_1=1/(R_{10}r)+R_{20}r$ besitzt.

Die Impulsantwort des Systems nach Gleichung (II,119) lautet also $h^2(t)$. Bildet man deren Erwartungswert, so berechnet sich $\sigma^2(t)$ nach der Gleichung (II,117).

Zur Berechnung von $E[h^2(t)]$ wurden Kennziffern und Faktoren für 40 Reihenglieder bei einer Differentialgleichung 3. Ordnung verwendet.

Die mittlere Impulsantwort sowie das Verhältnis $\sigma(t)/h_M(t)$ ist auf Bild 10 für einige spezielle Werte von R_{10}, R_{20} und ϵ dargestellt. Es hat sich gezeigt, daß bei 40 Reihengliedern $h_M(t)$ und $\|h^2(t)\|$ für $t \leq 3,5$ mit weniger als 1% relativem Fehler berechnet werden kann. Die Berechnung von $\sigma(t)$ ist mit 40 Reihengliedern nur für $t \leq 2$ genügend genau möglich.

Es wird darauf hingewiesen, daß die Funktion $\sigma(t)/h_M(t)$ für große Werte von t verschwindet.

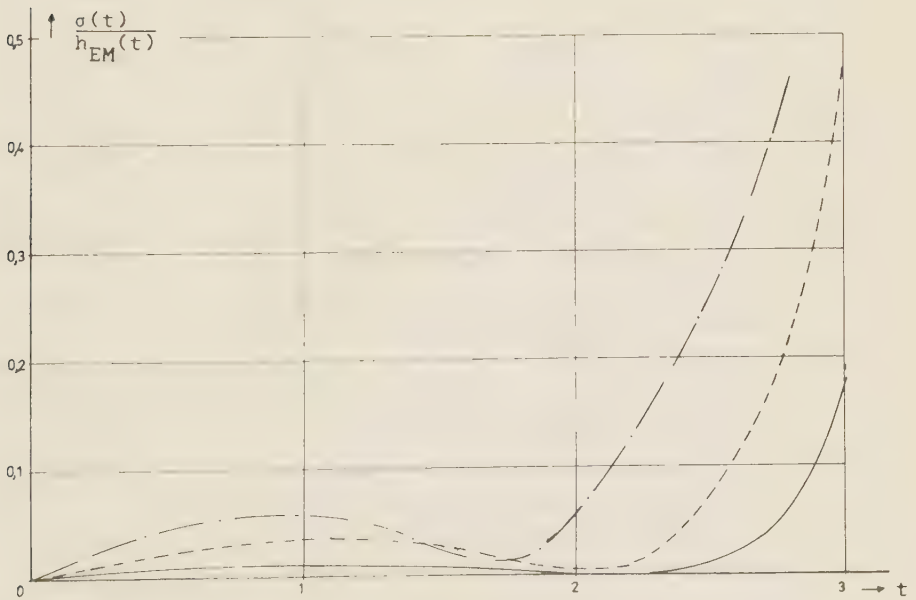
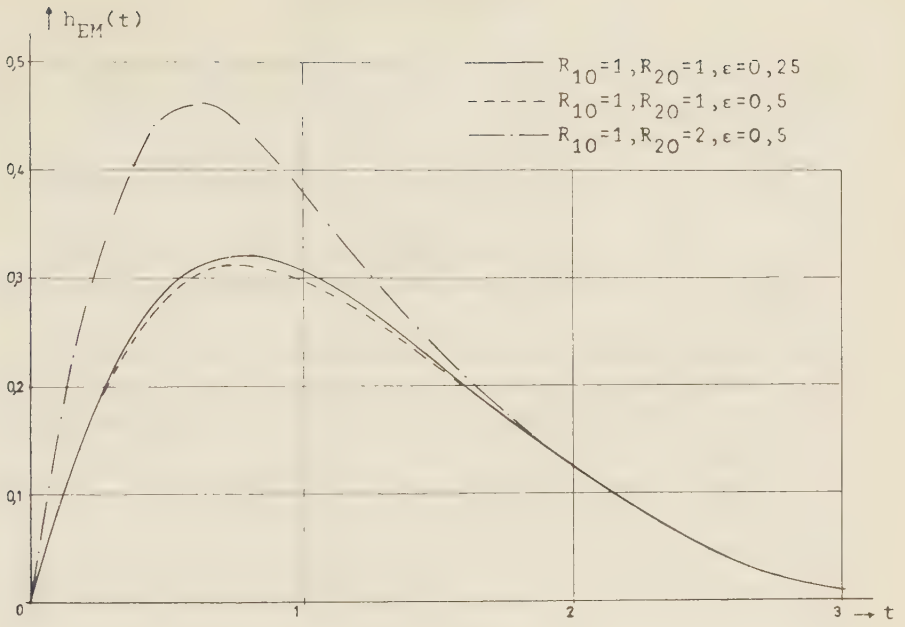


Bild 10

SCHRIFTTUMSVERZEICHNIS

- [1] S. T. Ariaratnam, and P. W. U. Graefe, Linear Systems with Stochastic Coefficients. Internat. J. Control (GB), Vol. 1, (1965), 239-250.
- [2] M. S. Bartlett, An Introduction to Stochastic Processes. Cambridge, University Press 1966.
- [3] W. B. Davenport and W. L. Root, An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise. McGraw-Hill, New York 1958.
- [4] A. Duschek, Vorlesungen über höhere Mathematik, Bd. 4. Springer-Verlag, Wien 1961.
- [5] B. W. Gnedenko, Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Akademie-Verlag, Berlin 1965.
- [6] W. Hahn, Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov. Springer-Verlag, Berlin 1959.
- [7] K. Karhunen, Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. Bd. 37, 1947.
- [8] Y. W. Lee, Statistical Theory of Communication. Wiley, New York 1966.
- [9] D. Laugwitz, Ingenieur Mathematik, Bd 4. Bibliographisches Institut, Mannheim 1967.
- [10] M. J. Lighthill, Einführung in die Theorie der Fourier-Analyse und der verallgemeinerten Funktionen. Bibliographisches Institut, Mannheim 1966.
- [11] D. Middleton, An Introduction to Statistical Communication Theory. McGraw-Hill, New York 1960.
- [12] A. Papoulis, Probability, Random Variables, and Stochastic Processes. McGraw-Hill, New York 1965.
- [13] W. Schiehlen und O. Kolbe, Ein Verfahren zur Untersuchung von linearen Regelsystemen mit periodischen Parametern. Regelungstechnik 15 (1967), 451 ff.
- [14] A. J. F. Siegert, Passage of Stationary Processes through Linear and Nonlinear Devices. IRE, PGIT-3 (1954).
- [15] W. I. Smirnow, Lehrgang der höheren Mathematik, Bd. 2. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1964.

- [16] W. I. Smirnow, Lehrzug der höheren Mathematik, Bd. 5.
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1962.
- [17] W. W. Solodownikow, Einführung in die statistische Dynamik
linearer Regelungssysteme. Oldenbourg-Verlag, München 1963.
- [18] W. W. Stepanow, Lehrbuch der Differentialgleichungen.
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1963.
- [19] K. H. Weise, Differentialgleichungen.
Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1966.
- [20] L. A. Zadeh , On Stability of Linear Varying-Parameter
Systems. Journal of Applied Physics, Vol. 22-4 (1951).
- [21] L. A. Zadeh , Initial Conditions in Linear Varying-Parameter
Systems. Journal of Applied Physics, Vol. 22-3 (1951).
- [22] L. A. Zadeh and C. A. Desoer, Linear System Theory.
McGraw-Hill, New York 1963.
- [23] R. Zurmühl, Matrizen. Springer-Verlag, Berlin 1964.

LEBENS LAUF

Am 1.4.1937 wurde ich, Otto Mildenberger, in Ludwigshafen a. Rh. geboren. Ich besuchte bis 1948 die Volksschule in Aachen und anschließend 5 Jahre lang das dortige Einhard-Gymnasium.

Nach einer Lehre im Elektro-Installationshandwerk und der Ablegung der Fachschulreifeprüfung begann ich Ostern 1957 das Studium der Elektrotechnik an der Maschinenbauschule in Aachen. Ich war nach Abschluß des Ingenieurexamens 2 Jahre lang bei einer Stuttgarter Industriefirma beschäftigt. Mit dem Wintersemester 1961/62 begann ich an der Technischen Hochschule Stuttgart mit dem Studium der Elektrotechnik und legte im Sommer 1965 das Diplomexamen ab.

Anschließend war ich zunächst 1 Jahr lang Doktorand am Stuttgarter Hochschulinstitut für Theoretische Elektrotechnik und später Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Allgemeine und Theoretische Elektrotechnik der Universität Erlangen-Nürnberg.

Seit April 1968 bin ich Wissenschaftlicher Assistent am Institut für Nachrichtentechnik der Ruhr-Universität Bochum.

